Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 4

1 Variationsprinzipien: das Hängende Seil

Gegeben sei ein Seil der Länge l und der Dichte ρ dessen Enden an zwei Punkten x_1 und x_2 mit $x_2 - x_1 < l$ auf Höhe h befestigt seien. Nutzen Sie die Methoden aus der Vorlesung um zu bestimmen welche Konfiguration das Seil einnimmt wenn es frei im Erdschwerefeld hängt? Die potentielle Energie für ein Seilsegment ds in kartesischen Koordinaten (x, y) ist durch $y \cdot g \cdot \rho \cdot ds$ gegeben.

2 Alternative Formulierung der Variation

In der Physik, und insbesondere auch in der Mechanik, werden Sie häufig mit der Aufgabe konfrontiert werden, ein *Funktional* F zu minimieren. Im Kontext der Mechanik bedeutet dies in den allermeisten Fällen, eine Bahnkurve γ_0 zu finden, für die ein gegebenes Funktional seinen minimalen/maximalen Wert annimmt. In der Vorlesung haben Sie eine Herangehensweise an dieses Problem kennengelernt, deren grundsätzliche Idee Ihnen aus der Analysis bereits bekannt sein dürfte. Anstatt das Funktional von Interesse, die Kurvenlänge, lediglich für eine einzelne Bahnkurve zu betrachten, ist es möglich eine Familie von Kurven zu betrachten, die durch einen Parameter ν gekennzeichnet sind. Hierdurch lässt sich die Frage, für welche Bahnkurve $\alpha(t, \nu) \equiv \alpha_\nu(t)$ *innerhalb der betrachteten Familie* das Funktional extremalisiert wird, umformulieren zur Frage, für welchen Wert ν_0 die Funktion $F_\alpha(\nu) := F[\alpha_\nu]$ ihren Extremalwert annimmt. Diese Bedingung lässt sich alternativ ausdrücken als

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} F_\alpha(\nu) \right)_{\nu = \nu_0} = 0. \tag{1}$$

Im Rahmen dieser Aufgabe werden Sie eine alternative Herangehensweise an Probleme dieses Typs kennenlernen, die eine große konzeptionelle Ähnlichkeit mit einer Taylorreihenentwicklung aufweist, und der sie auch in der Literatur häufig begegnen werden.

(i) Betrachten Sie eine beliebige Funktion $g(x)$. Zeigen Sie zunächst, dass g genau dann ein Extremum an der Stelle x_0 besitzt, wenn für alle Δx gilt, dass

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + O(\Delta x^2). \tag{2}$$

Diese Charakterisierung wollen wir nun auf Funktionale verallgemeinern. Im Folgenden betrachten wir zunächst ein Funktional der Form

$$F[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; f(q(t)), \tag{3}$$

mit einer nicht näher spezifizierten Funktion f.

(ii) Betrachten Sie eine analog zur Konvention der Vorlesung definierte Zweiparameterabbildung $\alpha(t, \nu) \equiv \alpha_\nu(t)$, für die gilt, dass $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$. Zeigen Sie, dass $F_\alpha(\nu) = F[\alpha_\nu]$ als

$$F_\alpha(\nu) = F[\gamma] + \delta_\alpha F + O(\nu^2) \tag{4}$$

geschrieben werden kann und bestimmen Sie $\delta_\alpha F$.

Aus Ihrem Ergebnis sollte nun folgen, dass γ genau dann einem Extremum von F innerhalb der Familie von Kurven $\alpha_\nu(t)$ entspricht, wenn $\delta_\alpha F = 0$ gilt. Wir wollen dieses Vorgehen nun auf eine Weise verallgemeinern, die es uns erleichtert Situationen zu diskutieren, in denen diese Familie als beliebig angenommen werden kann.

(iii) Betrachten Sie nun eine beliebige Störung der Kurve γ, gegeben durch

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \delta\gamma(t), \tag{5}$$

wobei $\delta\gamma(t)$ eine beliebige, vektorwertige Funktion im euklidischen Vektorraum als Teil der Galilei-Raumzeit bezeichne. Verallgemeinern Sie nun Ihre Herangehensweise aus Teilaufgabe (ii), um zu zeigen, dass

$$F[\tilde{\gamma}] = F[\gamma] + \delta F + O(\delta\gamma^2), \tag{6}$$

und bestimmen Sie δF.

(iv) Betrachten Sie nun ein Funktional der Form

$$G[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; g(q(t), \dot{q}(t)). \tag{7}$$

Bestimmen Sie δG als Funktion von $\delta\gamma$. Was muss gelten, damit eine Kurve γ dieses Funktional minimiert/maximiert?
Hinweis: Sie dürfen hier annehmen, dass $\alpha_\nu(t_{1/2})$ unabhängig von ν ist. Was bedeutet das für $\delta\gamma(t_{1/2})$?

3 Fermats Prinzip und Brechungsgesetze

Wir betrachten im Folgenden ein System in der (x, y)–Ebene. Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht aus allen möglichen Pfaden welche zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbinden immer denjenigen auswählt, welcher die Laufzeit minimiert. Es ergibt sich also

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \ . \tag{8}$$

Die Geschwindigkeit ist die Veränderung der Position mit der Zeit

$$v \equiv v(x, y) = \frac{ds}{dt} \ , \tag{9}$$

und hängt daher im Prinzip von den Koordinaten ab. Ein infinitesimales Längenelement lässt sich durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{10}$$

schreiben. Daraus folgt

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} \ , \tag{11}$$

wobei der Strich die Ableitung bezüglich x bezeichnet, d.h.

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} \ . \tag{12}$$

(i) Wir nehmen zunächst ein homogenes Medium an. Betrachten Sie einen Pfad y und eine Variation dieses Pfades $y \to y + \delta y$ und bestimmen Sie eine Gleichung für y' so, dass das obige Integral für τ extremalisiert wird. Charakterisieren sie den Pfad welchen das Licht nimmt. *Hinweis:* $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$.

(ii) Nun gehen wir davon aus, dass die Geschwindigkeit des Lichts von seiner Position abhängt, d.h. $v = v(x)$. Betrachten Sie wieder $y \to y + \delta y$ und bestimmen sie die Stationären Punkte von τ. Welcher Unterschied ergibt sich zu $v =$ konstant? *Hinweis:* Sie müssen die Differentialgleichung für y' dazu nicht lösen.

(iii) Zeigen Sie das Snellsche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{13}$$

Hinweis: Nutzen Sie das obige Resultat.

(iv) Zeigen Sie, dass für die Reflektion gilt

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \ . \tag{14}$$

Hinweis: Nach der Reflektion befindet sich das Licht im selben Medium d.h. $v_1 = v_2$.

4 Metrik und Geodäten auf der Kugel

Betrachten Sie die Metrik auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = R^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{15}$$

mit $\mu, \nu \in I(2)$.

(i) Bestimmen Sie die Metrikkomponenten $g_{\mu\nu}$ für $x^1 = \theta$ und $x^2 = \phi$.

(ii) Benutzen Sie die Christoffel Symbole vom letzten Blatt um die Geodäte zwischen zwei Punkten auf dem Äquator zu bestimmen.

(iii) Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte als Funktion ihrer Koordinaten uns skizzieren Sie die Geodäte.