Übungen zur Theoretischen Mechanik (T1)

Blatt 3

Dieses Blatt befasst sich mit kovarianten Ableitungen, Christoffelsymbolen und deren Bedeutung für die Beschreibung von Scheinkräften. Im Sinne der Übersichtlichkeit werden wir für die Koordinatendarstellung von Kurven die Notation $q^a(t) = x^a(\gamma(t))$ verwenden. Sämtliche Indizes sind Elemente der Indexmenge $I = \{1, 2, 3\}$, außerdem wird konsequent die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

1 Allgemeine Scheinkräfte

(i) Das zweite Newtonsche Gesetz lautet $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$, wobei $\boldsymbol{x}$ den Ortsvektor im euklidischen Vektorraum als Teil der Galilei-Raumzeit bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieses Gesetz in einer beliebigen, **nicht** explizit zeitabhängigen Basis die folgende Form annimmt:

$$\frac{1}{m} F^a\big(q(t)\big) = \ddot{q}^a(t) + \Gamma^a_{bc}\big(q(t)\big)\dot{q}^b(t)\dot{q}^c(t) \tag{1}$$

Wiederholen Sie dabei insbesondere die Herleitung des Ausdrucks für die Beschleunigung, der Sie in der Vorlesung begegnet sind.

(ii) Der zweite der Terme auf der rechten Seite von (1) kann als eine *Scheinkraft* interpretiert werden. Wie unterscheidet sich diese Scheinkraft von einer realen Kraft?

(iii) Betrachten Sie nun eine explizit zeitabhängige Basis, d.h. Basisvektoren der Form $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_a\big(q(t), t\big)$. Zeigen Sie, dass sich das Newtonsche Gesetz in einer solchen Basis wie folgt schreiben lässt:

$$\frac{1}{m} F^a\big(q(t)\big) = \ddot{q}^a(t) + \Gamma^a_{bc}\big(q(t)\big)\dot{q}^b(t)\dot{q}^c(t) + 2\Lambda^a_b\big(q(t)\big)\big)\dot{q}^b(t) \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten Λ^a_b.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Zeitableitung eines Basisvektors dieser Basis entlang der Kurve γ gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_a\big(q(t), t\big) = \dot{q}^b(t)\partial_b \boldsymbol{e}_a\big(q(t), t\big) + \frac{\partial \boldsymbol{e}_a}{\partial t}\big(q(t), t\big). \tag{3}$$

(iv) Betrachten Sie nun eine Punktmasse, die einer konstanten Kraft ausgesetzt ist. Ist es möglich, ein Inertialsystem zu finden, in dem das Teilchen zu zwei **verschiedenen** Zeitpunkten $t_1 \neq t_2$ ruht? Begründen Sie ihre Antwort.

(v) Gleichung (2) enthält zwei Terme, die Scheinkräfte beschreiben, und die sich beide auf die Wahl einer Basis zurückführen lassen. Ist es möglich, beide Scheinkräfte durch einen einzigen Ausdruck zu beschreiben? Wie muss die Theorie angepasst werden, um dies zu ermöglichen, und welche physikalische Interpretation könnte diese Modifikation haben?

2 Zentrifugalkraft

(i) Bestimmen Sie zunächst die Metrik $g_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle$ in der lokalen Basis, die sich aus der Wahl von Kugelkoordinaten ergibt. Nutzen Sie diese, um die inverse Metrik g^{ij}, die definiert ist durch

$$g^{im} g_{mj} = \delta^i_j, \tag{4}$$

zu finden.

(ii) In der Vorlesung haben Sie die folgende Formel für die Christoffelsymbole kennengelernt:

$$\Gamma^c_{ab}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} g^{cj}(\boldsymbol{x}) \big(\partial_a g_{jb}(\boldsymbol{x}) + \partial_b g_{ja}(\boldsymbol{x}) - \partial_j g_{ab}(\boldsymbol{x}) \big) \tag{5}$$

Nutzen Sie diese, um die Christoffelsymbole des euklidischen Raums in Kugelkoordinaten zu bestimmen.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welche Eigenschaften der Christoffelsymbole Sie nutzen können, um die Rechnung zu verkürzen.

(iii) Vergewissern Sie sich, dass für die so bestimmten Christoffelsymbole tatsächlich

$$\partial_a \boldsymbol{e}_b(\boldsymbol{x}) = \Gamma^c_{ab}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_c(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

gilt.

(iv) Betrachten Sie nun die Bahn einer Punktmasse in Kugelkoordinaten, $q(t) = (r(t), \theta(t), \phi(t))$. Bestimmen Sie die Scheinkräfte, die in diesem Koordinatensystem auf die Punktmasse wirken.

3 Corioliskraft

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Koordinatensystem. Die entsprechenden Koordinaten (r, φ, ϑ) seien wie folgt durch die kartesischen Koordinaten definiert:

$$x = r\cos(\varphi - \omega t)\sin(\vartheta), \;\; y = r\sin(\varphi - \omega t)\sin(\vartheta), \;\; z = r\cos(\vartheta). \tag{7}$$

(i) Geben Sie die lokale Basis zu diesem Koordinatensystem an - entweder durch explizite Rechnung, oder indem Sie die Basis aus Aufgabe 2 entsprechend anpassen.

(ii) Bestimmen Sie die Metrik sowie die Christoffelsymbole in diesen Koordinaten. Auch diese können Sie durch Nachdenken aus Ihren Ergebnissen aus Aufgabe 2 ableiten, d.h. es ist keine explizite Rechnung notwendig.

(iii) Bestimmen Sie die sich aus dieser Rotation ergebende Kraft, die auf eine Punktmasse auf der Bahn $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ wirkt. Dies ist die Ihnen aus der Experimentalphysik vielleicht schon bekannte *Corioliskraft*.

(iv) Ergänzen Sie die Skizze in Abb. 1 um die Corioliskraft, die auf die abgebildeten Punktmassen wirkt.

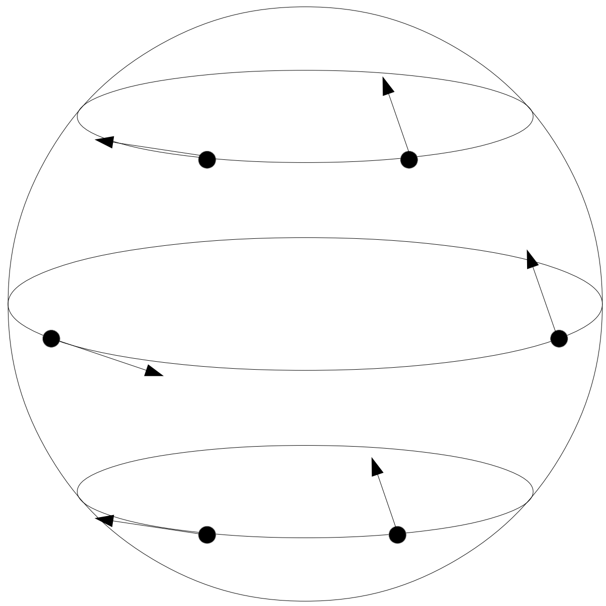

Abbildung 1: Die Punktmassen bewegen sich auf der Oberfläche einer Kugel, die Pfeile symbolisieren ihre Geschwindigkeiten. Nehmen Sie an, dass die Kugel sich im Uhrzeigersinn drehe.