Prof. Dr. Stefan Hofmann Sommersemester 2020

Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 2

1 Affine Räume

In der folgenden Aufgabe erörtern wir die Eigenschaften affiner Räume und arbeiten insbesondere die Unterschiede zu Verktorräumen heraus. Vereinfacht sind affine Räume „Verktorräume ohne Ursprung“. Gerade in der Physik liefert dies eine natürlichere Beschreibung, da es keinen Grund gibt einen bestimmten Punkt vor allen anderen auszuzeichnen. Grundlegender ist jedoch der Unterschied in der Geometrie; die geometrischen Eigenschaften des Vektorraums sind invariant unter der Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen, wohingegen affine Geometrie invariant unter der Gruppe der bijektiven affinen Abbildungen ist. Die beiden Gruppen sind jedoch nicht isomorph, daher gibt es sozusagen “mehr” affine Abbildungen als lineare.

Unterschied zwischen Vektoren und Punkten

Gegeben sie der Raum der Punkte in drei Dimensionen $E := \mathbb{R}^3$, sowie der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$. Für zwei Punkte $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ definieren wir den Abstandsvektor $\boldsymbol{AB} \in V$ als

$$\boldsymbol{AB} := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Außerdem wählen wir zwei Ursprünge $U, \Omega \in E$, $U = (0, 0, 0)$ und $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ mit deren Hilfe sich Ortsvektoren definieren lassen.

(i) Gegeben einen affinen Raum $(E, V, +)$ und drei Punkte $a, b, c \in E$, zeigen sie die Identität: $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ac}$.

(ii) Zeigen Sie $\boldsymbol{UA} = \boldsymbol{U\Omega} + \boldsymbol{\Omega A}$.

(iii) Berechnen Sie den Ortsvektor von A und B bezüglich Ω.

(iv) Betrachten Sie zwei *Vektoren* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ bezüglich einer Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Sei $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ eine andere Basis, so dass $\mathcal{M}$ die Transformationsmatrix ist, d.h. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^T = \mathcal{M}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)^T$etc. Geben Sie an, wie die Linearkombination $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$ unter diesem Basiswechsel transformiert.

(v) Betrachten Sie nun die *Ortsvektoren* von A und B bezüglich U; $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$, beziehungsweise bezüglich Ω; $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3), (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$. Drücken Sie die Linearkombination $\alpha(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)+\beta(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ durch die a_i und b_i aus.

(vi) Welche Bedingung müssen α und β erfüllen damit ihr Ergebnis micht von der Wahl des Ursprungs abhängt?

Beispiele für affine Räume

(i) Finden Sie eine geeignete Abbildung $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ um auf der Menge M der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, welche die Gleichung $x + y = 1$ erfüllen, einen affinen Raum zu definieren.

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine $n \times m$ Matrix und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungen für die Gleichung $\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m | \mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ ein affiner Raum über Ker$\mathcal{M}$ ist. Zeigen Sie, dass U im Allgemeinen kein Vektorraum ist. *Hinweis: Überlegen Sie sich dies zunächst für eine explizite Matrix.*

2 Galilei Raumzeit

Eine allgemeine Galilei Transformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ R(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t) \end{pmatrix},$$

wobei $R \in SO(3)$ eine Rotationsmatrix auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass die obigen Transformationen eine Gruppe bilden, d.h. zu jeder Transformation gibt es ein Inverses, die Komposition von Galilei Transformationen ist wieder eine Galilei Transformation und es existiert eine neutrale Transformation die $(t, \boldsymbol{x})$ auf $(t, \boldsymbol{x})$ abbildet.

(ii) Wie viele unabhängig von einander wählbare Parameter hat die obige Transformation, d.h. welche Dimension hat die Gruppe?

(iii) Betrachten Sie nun die spezielle Transformation für die R eine Rotation um die x-Achse um den Winkel α bezeichnet und $\boldsymbol{v} = (0, v_0, 0)^T, t_0 = \boldsymbol{r}_0 = 0$ ist. Zeigen Sie, dass die newtonsche Gleichung $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ invariant unter dieser Transformation ist, d.h. $\boldsymbol{F'} = m\ddot{\boldsymbol{r}}'$.

(iv) Zeigen Sie, dass Galilei Transformationen affine Transformationen sind. Eine Abbildung $f : E \to E'$ zwischen zwei affinen Räumen (E, V_E) und $(E', V_{E'})$ heißt genau dann affin, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : V_E \to V_{E'}$ gibt so, dass $\forall p, q \in E$

$$\boldsymbol{f}(p)\boldsymbol{f}(q) = \varphi(\boldsymbol{pq}).$$

Die linke Seite bezeichnet hierbei den Verbindungsvektor zwischen den Punkten $f(p)$ und $f(q)$.

(v) Zeigen Sie, dass der räumliche Abstand zwischen zwei gleichzeitigen Ereignissen in der Galilei Raumzeit unter Galilei Transformationen erhalten ist.