Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Lösung Blatt 1

1 Vektoren

Einführung

Vektoren bzw. *Vektorräume* sind eines der grundlegenden Werkzeuge der theoretischen Physik, und insbesondere in der Mechanik von großer Bedeutung. Diese können wie folgt definiert werden:

Sei V eine Menge zusammen mit zwei Abbildungen $\circ$ und $\oplus$, definiert durch

$$\begin{aligned} \oplus : V \times V &\to V \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &\mapsto \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (\lambda, \boldsymbol{v}) &\mapsto \lambda \circ \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft, dass das Bild dieser Abbildungen erneut im Vektorraum liegt, heißt *Abgeschlossenheit.*
Das Tripel $(V, \oplus, \circ)$ heißt $(\mathbb{R}-)$[1] *Vektorraum* und seine Elemente *Vektoren*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$

(ii) $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w} \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$

(iii) Es existiert ein *neutrales Element* $\mathbf{0}$, für welches $\mathbf{0} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \ \forall \boldsymbol{v} \in V$ gilt.

(iv) Für jedes $\boldsymbol{v} \in V$ existiert ein Element $-\boldsymbol{v}$, für welches $\boldsymbol{v} \oplus (-\boldsymbol{v}) = 0$ gilt.

(v) $\lambda \circ (\mu \circ \boldsymbol{v}) = (\lambda \cdot \mu) \circ \boldsymbol{v} \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in V$

(vi) $1 \circ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \ \forall \boldsymbol{v} \in V$

(vii) $(\lambda + \mu) \circ \boldsymbol{v} = \lambda \circ \boldsymbol{v} + \mu \circ \boldsymbol{v}$

Falls dies gilt, heißt die Abbildung $\oplus$ *Vektoraddition*, die Abbildung $\circ$ Skalarmultiplikation.

Wir stellen zunächst fest, dass die Abbilungen $\oplus$ und $\circ$ fundamental verschieden sind von den Abbildungen $+$ und $\cdot$, die auf dem Körper der rellen Zahlen definiert werden können. Gleichzeitig können wir beobachten, dass $\oplus$ und $+$ eine große strukturelle Ähnlichkeit aufweisen, ebenso wie $\circ$ und $\cdot$. Deshalb ist es üblich, $\oplus$ und $\circ$ einfach als $+$ und $\cdot$ zu notieren, unter der Annahme dass allen Beteiligten der Unterschied bewusst ist. Da wir nun sichergestellt haben, dass dies der Fall ist, werden wir von nun an dieser Konvention folgen. Aus den selben Gründen werden wir von nun an den Nullvektor $\mathbf{0}$ als 0 bezeichnen.
Ein wichtiges Werkzeug zur Beschreibung von Vektorräumen sind *Basen*. Das Verständnis dieses Begriffs erfordert das Konzept der *linearen Unabhängigkeit*:

[1] Rein mathematisch gibt es keinen Grund sich bei den Konstruktionen, die wir hier betrachten, auf reelle Zahlen zu beschränken. Wir tun dies dennoch, da die Mechanik - wie Sie aus der E1-Vorlesung wissen - im Allgemeinen mit reellen Zahlen auskommt.

$\{\boldsymbol{w}_i\}_i = W \subset V$ bezeichne[2] eine Menge unterschiedlicher Vektoren aus einem Vektorraum V, während $\{\lambda_i\}_i$ eine Menge reeller Zahlen bezeichne. Diese Vektoren heißen *linear unabhängig*, falls $\sum_i \lambda_i \boldsymbol{w}_i = 0$ gleichbedeutend ist mit $\lambda_i = 0 \forall i$. Eine Menge von Vektoren, die nicht linear unanbhängig ist, heißt *linear abhängig*.

Eine *Basis* kann nun wie folgt definiert werden:

Eine Menge linear unabhängiger Vektoren $B = \{\boldsymbol{b}_i\}_i \subset V$ heißt *Basis von V*, falls jeder Vektor in V sich als *Linearkombination* aus Vektoren in B schreiben lässt, d.h. falls für jeden Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ Koeffizienten $\{v^i\}_i$ existieren, sodass $v = \sum_i v^i \boldsymbol{b}_i$.

Die Anzahl von Basisvektoren, die nötig ist um eine Basis zu bilden, heißt *Dimension* des Vektorraums.

1.1 Lösung zu Teilaufgabe (i)

Verschiebungen im Raum bilden nicht nur das einfachste Beispiel für einen Vektorraum, sondern sind auch von großer physikalischer Relevanz, da sie eine der Grundlagen des Raum(zeit)begriffs der Mechanik bilden. Wir wollen nun zeigen, dass diese alle Axiome eines Vektorraums erfüllen, um sicherzustellen, dass wir alles, was wir über Vektorräume wissen, auf sie anwenden können.
Zunächst wollen wir zeigen, dass die Abbildungen $\oplus$ und $\circ$, gegeben durch die Hintereinanderausführung bzw. Streckung/Stauchung von Verschiebungen, abgeschlossen sind. Beginnen wir mit der Vektormultiplikation: Verschieben Sie einen beliebigen Punkt im Raum. Verschieben Sie Ihn anschließend erneut. Ihre beiden Verschiebungen lassen sich nun als eine einzige Verschiebung darstellen. Wenn wir die erste Verschiebung als $\boldsymbol{v}$ und die zweite als $\boldsymbol{w}$ bezeichnen, liefert dieses Vorgehen genau das Objekt, das wir als $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}$ bezeichnen. Hieraus folgt nun sofort, dass $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}$ tatsächlich eine Verschiebung im Raum darstellt.
Wenden wir uns nun der Skalarmultiplikation zu. Wählen Sie erneut einen beliebigen Raumpunkt und führen Sie eine beliebige Verschiebung durch. Betrachten Sie nun erneut die selbe Verschiebung, aber strecken/stauchen Sie ihre Länge um einen Faktor rellen Faktor λ. Dies entspricht der Multiplikation der ursprünglichen Verschiebung mit dem Faktor λ, und liefert offensichtlich erneut eine Verschiebung. Wenden wir uns nun den Axiomen zu:

(i) Im Kontext räumlicher Verschiebungen bedeutet diese Aussage, dass es bei der Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen nicht auf die Reihenfolge ankommt. Wie Sie sich schnell (bspw. durch eine Skizze veranschaulichen) können, ist dies tatsächlich der Fall.

(ii) Auch diese Aussage hat eine einfache Anschauung: Stellen Sie sich vor, Sie führen drei Verschiebungen hintereinander aus. Falls Sie dies tun, ist es immer möglich zwei unmittelbar nacheinander durchgeführte Verschiebungen zunächst zu einer einzigen zusammenzufassen, und dann die dritte hinzuzufügen. Insbesondere ist die sich so ergebende Verschiebung unabhängig davon, welche der beiden ursprünglichen Verschiebungen zuerst zusammengefasst werden. Auch dies ist der Fall, wie Sie sich schnell durch eine Skizze veranschaulichen können.

(iii) Das neutrale Element ist gegeben durch die Verschiebung eines beliebigen Punktes zurück auf den selben Punkt. Dies ist gleichbedeutend damit, den betrachteten Punkt gar nicht zu verschieben, wodurch sich Axiom (iii) automatisch ergibt.

(iv) Wählen Sie erneut einen beliebigen Punkt, und führen Sie eine beliebige Verschiebung durch. Sie werden nun feststellen, dass es ohne Weiteres möglich ist, den Punkt an seine alte Position zurückzuverschieben. Falls wir die erste Verschiebung mit $\boldsymbol{v}$ bezeichnet, ist diese zweite "Rückverschiebung" das gesuchte $-\boldsymbol{v}$. Da dies für jede Verschiebung möglich ist, ist Axiom (iv) erfüllt.

(v) Betrachten wir zunächst die linke Seite. Als Erstes führen wir die Operation in der Klammer durch. Die Verschiebung $\boldsymbol{v}$, deren Länge wir von nun an als L bezeichnen wollen, wird abgebildet auf den Vektor $\mu \circ \boldsymbol{v}$. Dies entspricht einer Verschiebung in die selbe Richtung wie $\boldsymbol{v}$, nun allerdings mit Länge $\mu \cdot L$. Führen wir nun die zweite Operation durch, erhalten wir die Verschiebung $\lambda \circ (\mu \circ \boldsymbol{v})$. Auch dies entspricht einer Verschiebung in die selbe Richtung wie $\boldsymbol{v}$, nun mit der Länge $\lambda(\cdot \mu \cdot L) = (\lambda \cdot \mu) \cdot L$, wobei wir benutzt haben dass die Reihenfolge der Multiplikation reeler Zahlen keine Reihenfolge spielt. Diese Verschiebung ist nun allerdings genau diejenige, die wir als $(\lambda \cdot \mu) \circ \boldsymbol{v}$ bezeichnen würden, womit das Axiom gezeigt ist.

[2] Diese Notation bezeichnet die Menge $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \ldots, \boldsymbol{w}_N\}$, wobei der genaue Wert von N entweder als beliebig angenommen wird oder aus dem Kontext klar ersichtlich sein sollte.

(vi) Es ist leicht zu sehen dass die Streckung/Stauchung einer Verschiebung um den Faktor 1 wieder zur ursprünglichen Verschiebung führt, sodass dieses Axiom unmittelbar erfüllt ist.

(vii) Der Beweis dieses Axioms erfolgt analog zu dem von Axiom (v).

1.2 Lösung zu Teilaufgabe (ii)

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Ebene und betrachten zunächst zwei Vektoren, $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$. Zwei Vektoren sind gemäß unserer Definition linear abhängig, falls sie nicht linear unabhängig sind - d.h., falls es zwei von null verschiedene relle Zahlen λ_1 und λ_2 gibt, sodass $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 0$. Erinnern wir uns nun daran, dass die Skalarmultiplikation einer Streckung/Stauchung entspricht, und daher insbesondere die Richtung der Vektoren unverändert lässt. Dies bedeutet nun, dass $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 0$ nur dann möglich ist, wenn $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ in die selbe bzw. entgegengesetze Richtung zeigen. Zwei Vektoren sind demnach linear unabhängig, falls dies nicht der Fall ist.
Betrachten wir nun den etwas komplexeren Fall dreier Vektoren in der Ebene. Da wir bereits verstanden haben, wie sich zwei Vektoren verhalten, ist es naheliegend auf unsere Erkenntnisse dieses Falls aufzubauen. Hierzu wählen wir aus den drei Vektoren zwei beliebige aus, nennen diese $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$, und unterscheiden die folgenden Fälle:

- Falls die beiden Vektoren linear abhängig sind existieren zwei reelle Koeffizienten λ_1^* und λ_2^*, für welche $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 0$ gilt. Dies bedeutet insbesondere, dass für die Koeffizienten $\lambda_1 = \lambda_1^*, \lambda_2 = \lambda_2^*$ und $\lambda_3 = 0$ die Bedingung für lineare Abhängigkeit erfüllt ist: Es existieren drei Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3, die nicht alle gleichzeitig gleich 0 sind, und für die gilt, dass $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = 0$, wobei $\boldsymbol{v}_3$ den dritten Vektor bezeichne.

- Sind die beiden Vektoren linear unabhängig, ist es stets möglich, den dritten Vektor als Linearkombinaten der beiden Vektoren darzustellen, d.h. es existieren zwei reelle Koeffizienten μ_1, μ_2, für die $\boldsymbol{v}_3 = \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2$ gilt. Hier aus folgt nun sofort, dass $\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = 0$, und die Vektoren sind linear abhängig.

Wir finden also das folgende Bild: Zwei Vektoren sind linear abhängig, falls sie in die selbe/entgegengesetzte Richtung zeigen, andernfalls sind sie linear unabhängig. Mehr als zwei Vektoren sind automatisch linear abhängig.

1.3 Lösung zu Teilaufgabe (iii)

Der Einfacheit halber beschränken wir uns wieder auf eine Ebene.
Die zentrale Eigenschaft einer Basis ist es, dass jeder Vektor im Vektorraum unseres Interesses sich als Linearkombination aus Basisvektoren darstellen lässt. Im Falle räumlicher Verschiebungen bedeutet dies, dass jede Verschiebung sich durch Streckung/Stauchung sowie Hintereinanderausführung aus den Basisvektoren generiert werden kann. Es ist nun einfach zu sehen, dass dies auf jede Menge, bestehend aus zwei linear unabhängigen Vektoren, zutrifft.

2 Ortsvektoren

Einführung

Das Konzept eines Ortsvektors im realen, physikalischen Raum werden Sie in der Vorlesung in großer Genauigkeit kennenlernen, weshalb wir uns hier lediglich auf das Nötigste beschränken wollen. Wir betrachten einen Raum, über den wir an dieser Stelle lediglich annehmen, dass die Menge der Verschiebungen von Punkten innerhalb dieses Raumes einen Vektorraum bildet. Wann immer dies der Fall ist, können wir jeden Punkt dieses Raumes eindeutig durch einen Vektor beschreiben.
Der Ausgangspunkt hierfür ist die Wahl eines ausgezeichneten Punktes, des sogenannten *Ursprungs*, den wir nun O nennen wollen. Ausgehend vom Ursprung kann nun jeder Punkt des Raumes durch eine eindeutige Verschiebung erreicht werden. Diese Verschiebung, bzw. dieser Vektor, heißt *Ortsvektor*. Diesen bezeichnen wir üblicherweise als $\boldsymbol{OP}$. P sei hierbei der Punkt, dessen Lage wir beschreiben möchten. Da jeder Punkt - nach der Wahl eines Ursprungs - eindeutig durch seinen Ortsvektor beschrieben ist, ist es üblich Punkte und Ortsvektoren als äquivalent zu behandeln.

2.1 Lösung zu Teilaufgabe (i)

Durch eine einfache Skizze finden wir die folgenden Darstellungen der Ortsvektoren:

$$\boldsymbol{OA} = 6\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{OB} = -6\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2$$

2.2 Lösung zu Teilaufgabe (ii)

Wir verfahren genau wie in Teilaufgabe (i):

$$\boldsymbol{O'A} = 8\boldsymbol{b}_1 - 8\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{O'B} = -4\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2$$

3 Koordinatensysteme

Als *Koordinatensystem* bezeichnet man eine Abbildung, die es erlaubt, jeden Punkt eines geeigneten Raumes eindeutig durch eine Menge reeller Zahlen zu charakterisieren - auch dieses Konzept werden Sie in der Vorlesung ausführlich behandeln. Während die Beschreibung eines Systems durch einen Ortsvektor in vielen Situationen vollkommen ausreichend ist, bietet eine koordinatenbasierte Beschreibung oftmals erhebliche Vorteile.
Eines der einfachsten Koordinatensysteme ist das *euklidische*. Dieses Koordinatensystem kann direkt aus dem Ortsvektor konstruiert werden. Zunächst wählen wir einen Ursprung, sowie eine Basis zueinander orthogonaler Basisvektoren, $\{\boldsymbol{e}_i\}_i$. Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes kann nun als $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^d x^i \boldsymbol{e}_i$, wobei d die Dimension des Raumes bezeichne, dargestellt werden, d.h. die Position des Punktes ist vollständig bestimmt durch die Parameter $\{x^i\}_i$. Diese Parameter sind nun genau die gesuchten kartesischen Koordinaten. Der einfachste Weg, neue Koordinatensysteme zu definieren, besteht darin, die neuen Koordinaten durch bereits bekannte Koordinaten auszudrücken. Ein Beispiel hierfür sind Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ), die in drei Raumdimensionen wir folgt über die kartesischen Koordinaten definiert werden können:

$$x(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi,\ y(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \sin\phi,\ z(r, \theta, \phi) = r \cos\theta.$$

3.1 Lösung zu Teilaufgabe (i)

Die kartesischen Koordinaten in der Ebene lassen sich über die folgenden Relationen durch Polarkoordinaten ausdrücken:

$$x(r, \phi) = r \cos\phi,\ y(r, \phi) = r \sin\phi.$$

Hieraus folgen nun sofort die kartesischen Koordinaten des Punkts P, die wir im Folgenden als x_P und y_P bezeichnen werden:

$$x_P = \cos\phi_0,\ y_0 = \sin\phi_0.$$

3.2 Lösung zu Teilaufgabe (ii)

In zwei Dimensionen genügen uns zwei Basisvektoren, die wir als $\boldsymbol{e}_x$ bzw. $\boldsymbol{e}_y$ bezeichnen und als orthogonal zueinander annehmen. Wir können nun die Beziehung zwischen Ortsvektor und kartesischen Koordinaten sowie unser Ergebnis der letzten Teilaufgabe benutzen, um den Ortsvektor eines beliebigen Punktes als Funktion seiner Polarkoordinaten anzugeben:

$$\boldsymbol{x}(r, \phi) = x(r, \phi)\boldsymbol{e}_x + y(r, \phi)\boldsymbol{e}_y \hat{=} \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt sofort die Darstellung des Ortsvektors von P:

$$\boldsymbol{x}_P = \sin\phi_0 \boldsymbol{e}_x + \cos\phi_0 \boldsymbol{e}_y \hat{=} \begin{pmatrix} \cos\phi_0 \\ \sin\phi_0 \end{pmatrix}$$

3.3 Lösung zu Teilaufgabe (iii)

Nachdem wir in Teilaufgabe (i) bereits die kartesischen Koordinaten von P bestimmt haben, können wir unser Ergebnis nutzen um die Darstellung von P im Koordinatensystem Z ohne weitere Umwege zu bestimmen:

$$\begin{aligned} z_P^1 =& z^1(\sin\phi_0, \cos\phi_0) = \sin\phi_0 + \sqrt[3]{\cos\phi_0} \\ z_P^2 =& z^2(\sin\phi_0, \cos\phi_0) = \sin\phi_0 - \sqrt[3]{\cos\phi_0} \end{aligned}$$

3.4 Lösung zu Teilaufgabe (iv)

Die Bahnkurve $q(t)$ weist dem betrachteten Punkt zu jedem Zeitpunkt t seine Position, ausgedrückt durch Polarkoordinaten, zu. In Teilaufgabe (ii) haben wir bereits den Ortsvektor als Funktion dieser Koordinaten, $\boldsymbol{x}(r,\phi)$, bestimmt. Der Ortsvektor zum Zeitpunkt t ist dementsprechend gegeben durch $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(q^1(t), q^1(t))$. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir diesen Ausdruck als Spaltenvektor dar:

$$\boldsymbol{x}(t) \hat{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha t \\ \sin\alpha t \end{pmatrix}$$

3.5 Lösung zu Teilaufgabe (v)

Aus dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe können wir die Darstellung der Bahnkurve in kartesischen Koordinaten ablesen und erhalten

$$x(q(t)) = \cos\alpha t,\ \ y(q(t)) = \sin\alpha t.$$

Da die Transformation von kartesischen zu Z-Koordinaten bekannt ist, können wir diese Werte einfach in die Transformation einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{q}^1(t) \equiv& z^1\big(x(q(t), y(q(t))\big) = \sin\alpha t + \sqrt[3]{\cos\alpha t} \\ \tilde{q}^2(t) \equiv& z^2\big(x(q(t), y(q(t))\big) = \sin\alpha t - \sqrt[3]{\cos\alpha t} \end{aligned}$$

3.6 Lösung zu Teilaufgabe (vi)

Die Koordinatenlinien des Koordinatensystems Z sind gegeben durch die Linien, entlang derer je eine der Koordinaten (z^1, z^2) konstant ist. Um diese graphisch darzustellen ist es hilfreich das Gleichungssytem (1) aus dem Übungsblatt wie folgt umzuschreiben:

$$y = z^1(x,y) - \sqrt[3]{x},\ \ y = z^2(x,y) + \sqrt[3]{x}.$$

Wir bezeichnen nun die Menge als z^1-Koordinatenlinie $L^1(z)$ die Menge aller Punkte, für die z^1 den konstanten Wert z annimmt. Wir können nun unsere modifizierte Fassung von Gleichung (1) benutzen, um $L^1(z)$ in kartesischen Koordinaten auszudrücken:

$$L^1(z) = \{(x,y)|y = z - \sqrt[3]{x}\}$$

Eine Auswahl dieser Koordinatenlinien ist in Abb. 2 dargestellt.

Wir können nun analog $L^2(z)$ definieren, und erhalten durch die selbe Vorgehensweise die Darstellung der Koordinatenlinien in kartesischen Koordinaten:

$$L^2(z) = \{(x,y)|y = z + \sqrt[3]{x}\}$$

Diese sind in Abb. 3 skizziert.

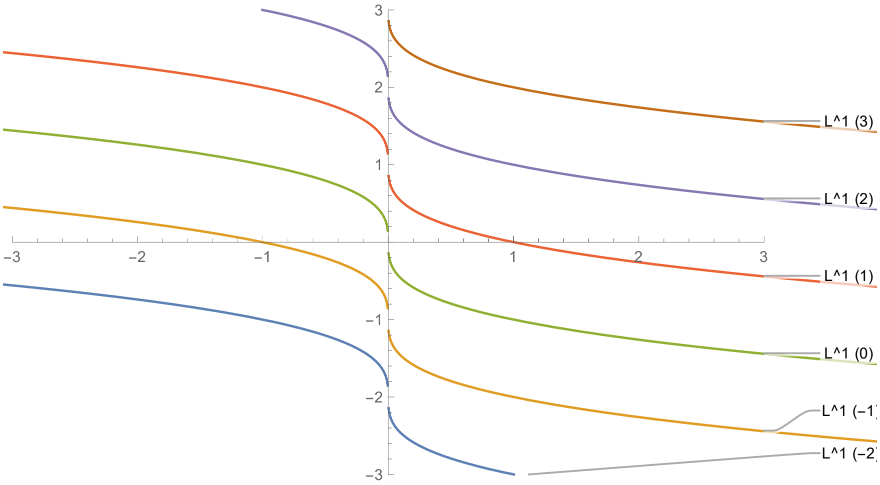

Abbildung 1: Die z^1-Koordinatenlinien für $z^1 \in \{-2,-1,0,1,2,3\}$

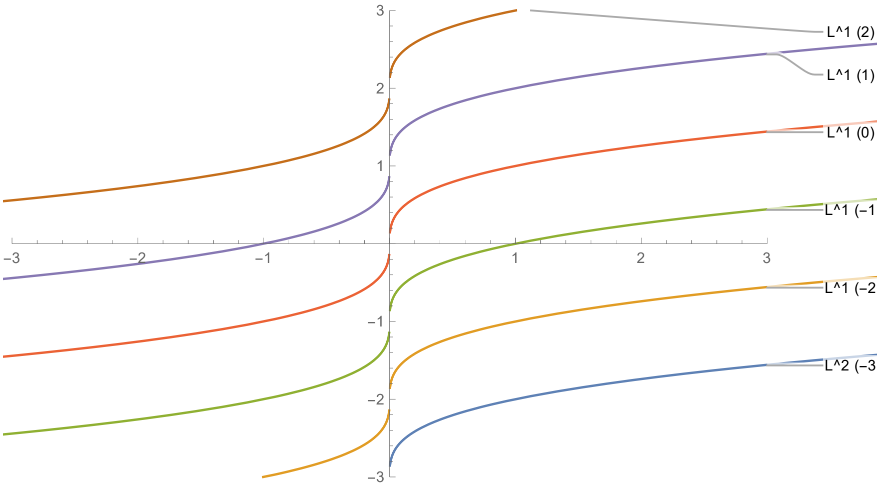

Abbildung 2: Die z^2-Koordinatenlinien für $z^1 \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$

4 Lokale Basen

Einführung

Im Kontext der Mechanik sind Ihnen zwei Arten von Vektoren begegnet: Ortsvektoren, die die Position eines Punktteilchens angeben, und Geschwindigkeitsvektoren, die die Geschwindigkeit ebensolcher beschreiben. Wir können nun zunächst beobachten, dass Geschwindigkeitsvektorenunabhängig von der Wahl des Ursprungs sind, während Ortsvektoren offensichtlich stark von ebendieser abhängen. Dies kann man sich wie folgt veranschaulichen: Während Ortsvektoren vom Ursprung ausgehen, sind Geschwindigkeitsvektoren an dem Punkt der Kurve, in dem sie die Geschwindigkeit angeben, fixiert. Wir sehen nun schnell, dass die Geschwindigkeiten **in einem Punkt P** einen Vektorraum bilden, den man *Tangentialraum* nennt. Diese Konzepte werden Sie in der Vorlesung in großere Genauigkeit kennenlernen, weshalb wir uns hier auf ein einfaches Bild beschränken wollen.

Um die Beschreibung von Tangentialvektoren zu vereinfachen wäre es wünschenswert, diesen mit einer Basis zu versehen. Der kanonische Weg eine solche Basis, die üblicherweise als *lokale Basis* bezeichnet wird, zu konstruieren, beginnt mit der Wahl von Koordinaten auf dem zugrundeliegenden Raum. Hierdurch lässt sich der komplette Raum mit Koordinatenlinien bedecken, also mit Kurven, entlang derer gewisse Koordinaten konstant sind. Die lokale Basis des Tangentialraums in einem Punkt P lässt sich dann konstruieren als die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien im Punkt P. Um dies formal festzumachen legen wir uns zunächst auf einen dreidimensionalen Raum fest und wählen zunächst ein beliebiges Koordinatensystem, dessen Koordinaten wir als (y^1, y^2, y^3) bezeichnen, sowie einen Punkt P, dessen Koordinaten wir als (y^1_P, y^2_P, y^3_P) bezeichnen. Die lokalen Basisvektoren $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ des Tangentialraums im Punkt P lassen sich

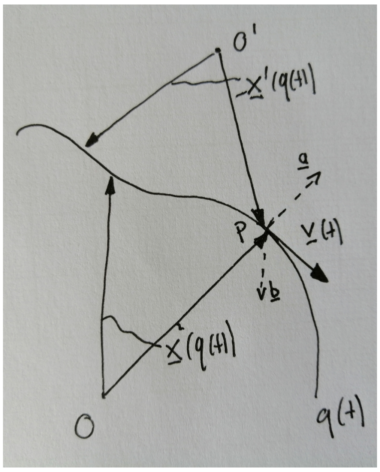

Abbildung 3: Die gebogene Linie in der Mitte stellt eine generische Raumkurve $q(t)$ dar. Unterhalb ist ein Ursprung O dargestellt, zusammen mit den Ortsvektoren zweier Punkte auf der Raumkurve ausgehen von O. Oberhalb der Kurve finden Sie das selbe Bild, ausgehend von einem zweiten Ursprung O'.
Im Punkt P ist der Tangentialvektor $\boldsymbol{v}$ dargestellt. Die gestrichelten Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ dienen als Beispiele für weitere Vektoren aus dem Tangentialraum am Punkt P.

dann durch den Ortsvektor ausdrücken als

$$\boldsymbol{b_1}(P) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\boldsymbol{x}\right)(y_P^1, y_P^2, y_P^3),$$
$$\boldsymbol{b_2}(P) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y^2}\boldsymbol{x}\right)(y_P^1, y_P^2, y_P^3)$$
$$\boldsymbol{b_3}(P) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y^3}\boldsymbol{x}\right)(y_P^1, y_P^2, y_P^3).$$

Mithilfe dieser Basis lässt sich nun jeder Tangentialvektor $\boldsymbol{v}$ am Punkt P darstellen als

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \boldsymbol{b_i}(P),$$

mit drei geeigneten reellen Koeffizienten $\{v^i\}_i$.

4.1 Lösung zu Teilaufgabe (i)

In Aufgabe 3 haben wir die Form des Ortsvektors in kartesischen Koordinaten diskutiert. Um ihn nun im Koordinatensystem Z auszudrücken, müssen wir zunächst die kartesischen Koordinaten x und y durch z^1 und z^2 ausdrücken. Hierzu müssen wir das Gleichungssystem (1) nach x und y lösen, und finden als Ergebnis:

$$x = \frac{1}{8}(z^1 - z^2)^3, y = \frac{1}{2}(z^1 + z^2)$$

Wir erhalten damit nun die folgende Darstellung des Ortsvektors:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(z^1, z^2) \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(z^1 - z^2)^3 \\ \frac{1}{2}(z^1 + z^2) \end{pmatrix}$$

4.2 Lösung zu Teilaufgabe (ii)

Wir können nun unser Ergebnis aus Teilaufgabe (i) nutzen, um die lokalen Basisvektoren zu erhalten. Eine einfache Anwendung der Definition liefert die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1(z^1, z^2) \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{3}{8}(z^1 - z^2)^2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2(z^1, z^2) \hat{=} \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}(z^1 - z^2)^2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4.3 Lösung zu Teilaufgabe (iii)

Bevor wir mit der konkreten Rechnung beginnen, macht es Sinn die Rechnung ein wenig zu vereinfachen. Wir wenden zunächst die Kettenregel an:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) =& \frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{x}}(\tilde{q}^1(t), \tilde{q}^2(t)) = \\ =& \sum_{i=1}^{2} \frac{d\tilde{q}^i}{dt}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial z^i}\tilde{\boldsymbol{x}}(z^1, z^2)\bigg|_{(z^1,z^2)=(\tilde{q}^1(t),\tilde{q}^2(t))}\end{aligned}$$

Wir erkennen nun den jeweils zweiten Term jedes Summanden als die lokalen Basisvektoren $\boldsymbol{b}_1$ bzw. $\boldsymbol{b}_2$ am Punkt $\tilde{q}(t)$, wodurch sich der Geschwindigkeitsvektor wie folgt darstellen lässt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) =& \sum_{i=1}^{2} \frac{d\tilde{q}^i}{dt}(t) \cdot \boldsymbol{b}_i(\tilde{q}(t)) = \\ =& \alpha\big(\cos\alpha t - \frac{1}{3}\frac{\sin\alpha t}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha t}}\big)\boldsymbol{b}_1(\tilde{q}(t)) + \alpha\big(\cos\alpha t + \frac{1}{3}\frac{\sin\alpha t}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha t}}\big)\boldsymbol{b}_2(\tilde{q}(t))\end{aligned}$$

4.4 Lösung zu Teilaufgabe (iv)

Zunächst müssen wir den Punkt, den die Kurve $\tilde{q}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt, bestimmen. Auswertung von $\tilde{q}(t)$ bei $t = 0$ liefert

$$\tilde{q}^1(0) = 1,\ \tilde{q}^2(t) = -1.$$

Hiermit können wir nun die Basisvektoren an diesem Punkt bestimmen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1(\tilde{q}(0)) \hat{=}& \begin{pmatrix} \frac{3}{8}\big(1-(-1)\big)^2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{b}_2(z^1, z^2) \hat{=}& \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}\big(1-(-1)\big)^2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den gesamten Vektor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) =& \alpha\big(\cos\alpha t - \frac{1}{3}\frac{\sin\alpha t}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha t}}\big)\bigg|_{t=0} \boldsymbol{b}_1(\tilde{q}(0)) + \alpha\big(\cos\alpha t + \frac{1}{3}\frac{\sin\alpha t}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha t}}\big)\bigg|_{t=0} \boldsymbol{b}_2(\tilde{q}(t)) = \alpha\boldsymbol{b}_1(\tilde{q}(0)) + \alpha\boldsymbol{b}_2(\tilde{q}(t)) = \\ =& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{e}_y.\end{aligned}$$