Arnold Sommerfeld Center | Ludwig–Maximilians–Universität München

Prof. Dr. Stefan Hofmann | Sommersemester 2020

Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 1

Dieses Blatt wird in den ersten Tutorien beginnend am 5. Mai behandelt.
Sowohl die Vorlesung als auch der Übungsbetrieb bauen auf Grundlagen aus dem letzten Semester auf. Dieses Blatt enthält eine Reihe von Aufgaben, die Ihnen als Orientierung für eine zielgerichtete Wiederholung dieser Grundlagen dienen soll. Dementsprechend sind die Aufgaben vor Allem auf konzeptionelle Klarheit, anstatt auf rechnerische Komplexität angelegt - dieser werden wir früh genug begegnen - und es ist in Ihrem Interesse, bei der Bearbeitung die selbe Philosophie zu verfolgen.
Der hier angeschnittene Stoff ist bei Weitem nicht alles, was Sie im Laufe des Semester benötigen werden, sollte Ihnen aber zumindest den Einstieg etwas erleichtern.

1 Vektoren

(i) Überlegen Sie sich, dass sich aus der Menge aller Verschiebungen von Punkten im Raum ein Vektorraum bilden lässt. Die Vektoraddition $+$ sei hierbei gegeben durch die Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen, während die Multiplikation mit einem Skalar, $\cdot$, einer Streckung/Stauchung einer Verschiebung entspricht.

(ii) Diskutieren Sie die Bedeutung von linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit auf diesem Vektorraum.

(iii) Wie sieht eine Basis dieses Vektorraums aus?

2 Ortsvektoren

Betrachten Sie zunächst Abbildung 1.

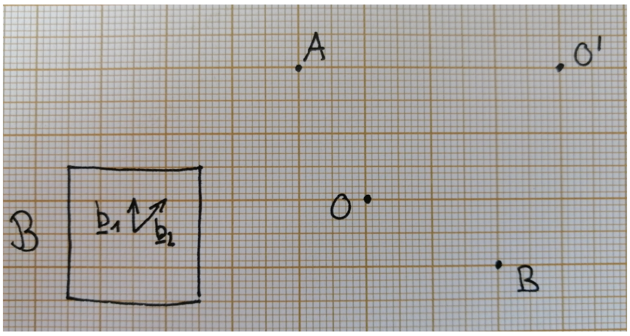

Abbildung 1: Die Basis $\mathcal{B}$ sowie alle für diese Aufgabe wichtigen Punkte.

(i) Stellen Sie die Ortsvektoren der Punkte A und B bzgl. des Ursprungs O in der Basis $\mathcal{B}$ dar.

(ii) Wiederholen Sie Teilaufgabe (i) mit dem Ursprung O'.

3 Koordinatensysteme

Ein Punkt P in einer zweidimensionalen Ebene sei beschrieben durch die Polarkoordinaten $(r = 1, \phi = \phi_0)$, wobei ϕ_0 eine beliebige, reelle Konstante bezeichne.

(i) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten des Punktes P als Funktion von ϕ_0.

(ii) Drücken Sie den Ortsvektor von P explizit durch die üblichen kartesischen Basisvektoren aus und stellen Sie ihn als Spaltenvektor dar.

(iii) Betrachten Sie nun ein weiteres Koordinatensystem Z, dessen Koordinaten (z^1, z^2) wie folgt durch die kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden können:

$$z^1(x, y) = y + \sqrt[3]{x}, \; z^2(x, y) = y - \sqrt[3]{x} \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P in diesen Koordinaten.

(iv) Ein Punkt bewege sich nun auf der Kreisbahn, welche in Polarkoordinaten beschrieben ist durch $q(t) \equiv (q^1(t), q^2(t)) \equiv (r(t), \phi(t))$, wobei $r(t) = 1$ und $\phi(t) = \alpha \cdot t$, mit einer beliebigen reellen Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Ortsvektor dieses Punktes als Funktion der Zeit t an.

(v) Geben Sie die Bahnkurve im Koordinatensystem Z an, d.h. bestimmen Sie $\tilde{q}(t) \equiv (\tilde{q}^1(t), \tilde{q}^2(t)) \equiv (z^1\big(x(q(t), y(q(t))\big), z^2\big(x(q(t), y(q(t))\big)$.

(vi) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien des Koordinatensystems Z sowie die Bahnkurve $\tilde{q}(t)$.

4 Lokale Basen

(i) Geben Sie zunächst den Ortsvektor eines beliebigen Punktes als Funktion seiner Koordinaten im Koordinatensystem Z aus Aufgabe 3, (z^1, z^2), an.

(ii) Bestimmen Sie nun die lokale Basis $\{\boldsymbol{b_1}(z^1, z^2), \boldsymbol{b_2}(z^1, z^2)\}$, die definiert ist durch

$$\boldsymbol{b_1}(z^1, z^2) = \frac{\partial}{\partial z^1} \tilde{\boldsymbol{x}}(z^1, z^2),$$
$$\boldsymbol{b_2}(z^1, z^2) = \frac{\partial}{\partial z^2} \tilde{\boldsymbol{x}}(z^1, z^2).$$

$\tilde{\boldsymbol{x}}(z^1, z^2)$ bezeichne hier Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (i).

(iii) Drücken Sie die Tangentialvektoren an die Kurve $\tilde{q}(t)$ aus Aufgabe 3, definiert durch $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{x}}(\tilde{q}^1(t), \tilde{q}^2(t))$, in der lokalen Basis $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ aus. Achten Sie dabei insbesondere darauf, an welchem Punkt Sie die Basisvektoren auswerten.
Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel, $\frac{d}{dt}\big(f(g(t), h(t))\big) = \frac{dg}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial g}(g(t), h(t)) + \frac{dh}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial h}(g(t), h(t))$

(iv) Stellen Sie nun den Tangentialvektor zum Zeitpunkt $t = 0$ in der kartesischen Basis dar.