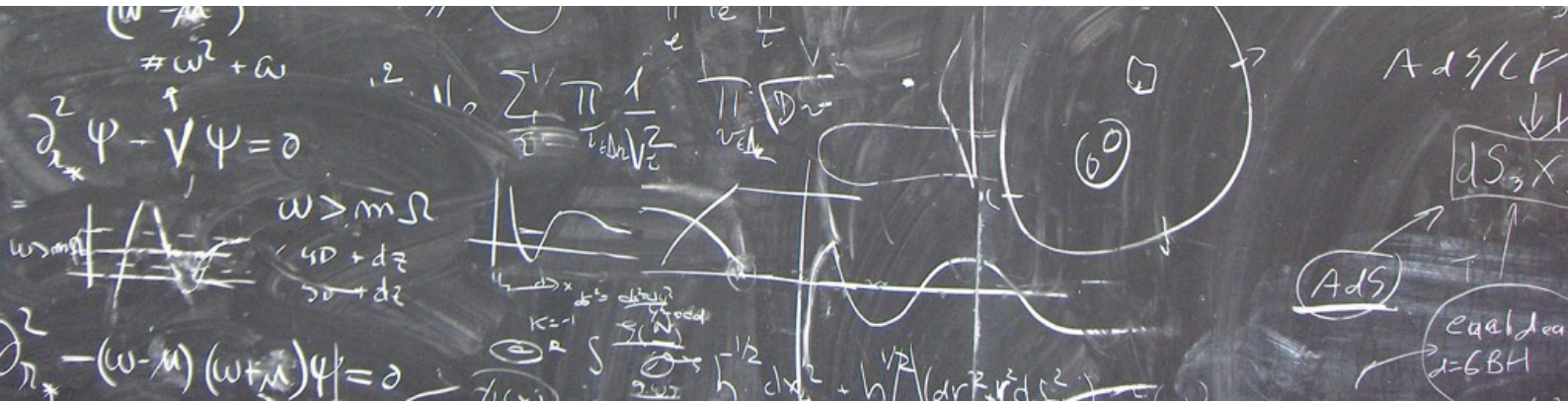




— Lecture Notes —

# Konzepte und Strukturen zur Beschreibung Mechanischer Systeme

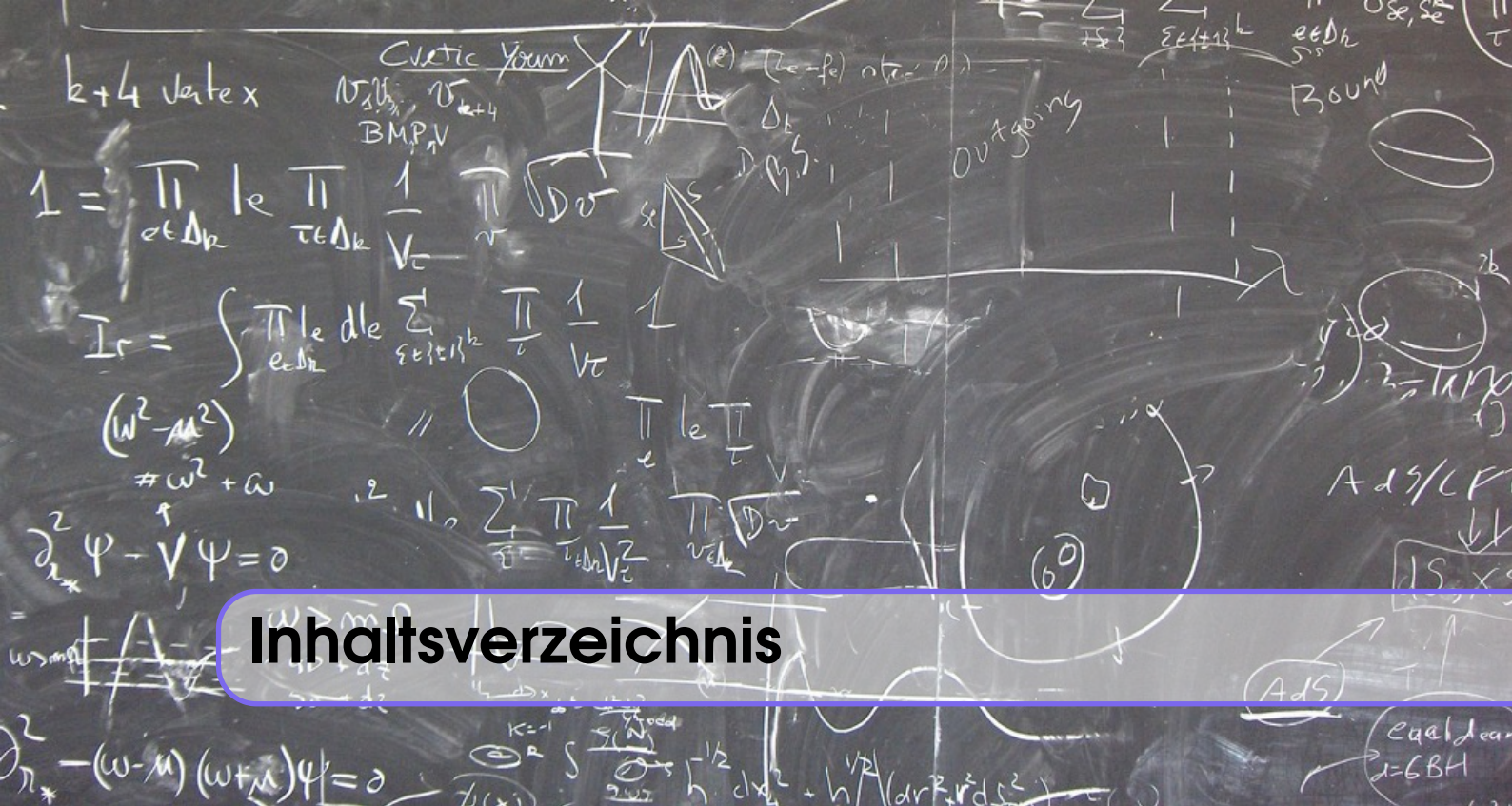
Prof. Dr. Stefan Hofmann



LMU München



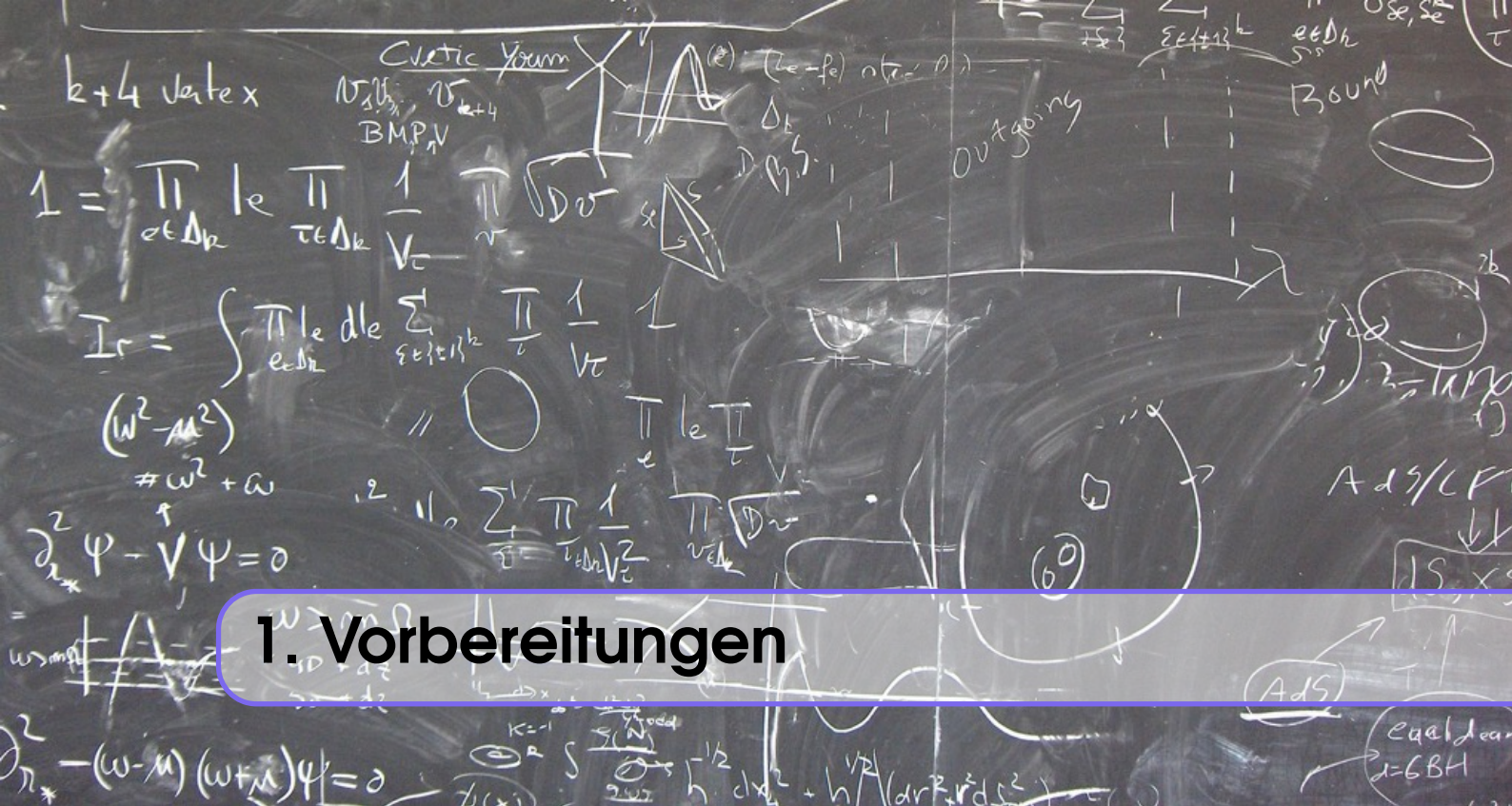
Dieses Skript wurde mit Hilfe des LaTeX-Templates von Mathias Legrand hergestellt,  
siehe <https://www.latextemplates.com/template/the-legrand-orange-book> .



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbereitungen</b> .....	<b>5</b>
1.1	<b>Elementare Geometrische Konzepte &amp; Koordinaten</b>	<b>5</b>
1.2	<b>Galilei-Raumzeit &amp; Relativitätsprinzip</b>	<b>12</b>
1.2.1	Relativität von Geschwindigkeit .....	24
1.2.2	Relativität der Richtung .....	25
1.2.3	Relativität des Ursprungs in Raum und Zeit .....	35
1.2.4	Galilei-Gruppe und Relativitätsprinzip von Galilei .....	36
1.3	<b>Die Sprache der Klassischen Mechanik</b>	<b>36</b>
<b>2</b>	<b>Newton</b> .....	<b>37</b>
2.1	<b>Kinematische Aspekte</b>	<b>37</b>
2.2	<b>Dynamische Aspekte</b>	<b>46</b>
2.2.1	Lokale Aussagen .....	48
2.2.2	Globale Aussagen .....	55
2.2.3	Von explizit zeitabhängigen dynamischen Systemen zu autonomen Differentialgleichungen .....	57
2.2.4	Autonome Botanik .....	58
2.3	<b>Lineare dynamische Systeme</b>	<b>63</b>
2.3.1	Explizit zeitabhängige lineare mechanische Systeme .....	70
<b>3</b>	<b>Hamilton</b> .....	<b>83</b>
3.1	<b>Duale Konzepte</b>	<b>83</b>
3.2	<b>Hamiltonsche Systeme</b>	<b>88</b>

<b>3.3</b>	<b>Die symplektische Gruppe</b>	<b>92</b>
<b>3.4</b>	<b>Potentialtheorie</b>	<b>93</b>
3.4.1	Existenz des Phasenflusses .....	93
3.4.2	Reversibilität des Phasenflusses .....	95
3.4.3	Erreichbarkeit .....	96
<b>4</b>	<b>Lagrange .....</b>	<b>97</b>
<b>4.1</b>	<b>Überlagerungsoperatoren</b>	<b>97</b>
<b>4.2</b>	<b>Stetigkeit von Überlagerungsoperatoren</b>	<b>98</b>
<b>4.3</b>	<b>Differenzierbarkeit von Überlagerungsoperatoren</b>	<b>100</b>
<b>4.4</b>	<b>Differenzierbarkeit von Parameterintegralen</b>	<b>103</b>
<b>4.5</b>	<b>Variationsprobleme</b>	<b>104</b>
<b>4.6</b>	<b>Euler-Lagrange Gleichung</b>	<b>106</b>
<b>4.7</b>	<b>Mechanik nach Lagrange</b>	<b>108</b>



# 1. Vorbereitungen

Wir beginnen mit einigen elementaren Konzepten, die Ihnen noch nicht bekannt sein brauchen. Die Qualifikation *elementar* bezieht sich dabei auf deren durch unsere Betrachtungstiefe gegebenen atomaren Charakter. Dennoch sind sie hinreichend konkret mit unserer Anschauung verknüpft, um sich als erste intellektuelle Fingerübungen in der präzisen Konzeptionierung/Konzeptualisierung von Erfahrungstatsachen zu eignen. Weiterhin bauen auf ihnen wesentlich potentere Konzepte und Aussage auf, deren Bedeutung für die strukturelle Erfassung mechanischer Systeme und ihrer Dynamik schwerlich überschätzt werden kann.

## 1.1 Elementare Geometrische Konzepte & Koordinaten

Zunächst bereiten wir den Begriff der Galilei-Raumzeit und das entsprechende Relativitätsprinzip vor, was grundlegende geometrische Konzepte einschließt.

**Konzept 1.1.1 — Affiner Raum.** Ein **affiner Raum**  $\mathcal{A}$  über  $\mathbb{K}$  ist ein Tripel  $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, Z)$  bestehend aus einer Menge  $\mathcal{P}$ , deren Elemente Punkte genannt werden, aus einem Vektorraum  $\mathcal{V}$  über einem kommutativen Körper  $\mathbb{K}$  und aus einer Abbildung  $Z: \mathcal{P} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ , die jedem geordneten Paar  $(p, q)$  von Punkten aus  $\mathcal{P}$  eindeutig einen mit  $\underline{pq}$  bezeichneten Vektor aus  $\mathcal{V}$  so zuordnet, daß folgende Axiome erfüllt sind:

- (1) Zu jedem Punkt  $p \in \mathcal{P}$  und jedem Vektor  $v \in \mathcal{V}$  gibt es genau einen Punkt  $q \in \mathcal{P}$  mit  $v = \underline{pq}$ .
- (2)  $\underline{pq} + \underline{qr} = \underline{pr}$  für alle  $p, q, r \in \mathcal{P}$ .

Als Dimension von  $\mathcal{A}$  wird die Dimension des zugeordneten Vektorraums  $\mathcal{V}$  bezeichnet:  $\text{Dim } \mathcal{A} = \text{Dim } \mathcal{V}$ .

Das Axiom (1) besagt gerade, daß bei fester Wahl des Punktes  $p$  die Vektoren aus  $\mathcal{V}$  umkehrbar eindeutig den Punkten aus  $\mathcal{P}$  zugeordnet sind. Mit  $O$  als Anfangspunkt (Ursprung)

können wir daher  $\mathcal{V}$  als den Raum der **Ortsvektoren** von  $\mathcal{P}$  relativ zu  $O$  auffassen. Als Anfangspunkt kann jedoch jeder beliebige Punkt gewählt werden. Wählen wir einen beliebigen Anfangspunkt und bezeichnen diesen mit  $O \in \mathcal{P}$ , so ist also jedem Punkt  $r \in \mathcal{P}$  umkehrbar eindeutig der Ortsvektor  $\underline{Or}$  zugeordnet. Der Begriff des Ortsvektors ist als Verbindungsvektor zwischen einem beliebigen aber fixierten Ursprung und einem beliebigen Punkt ist ein sinnvolles Konzept. Es ist klar, daß wir uns bemühen, keine Aussagen zu treffen, die von der Wahl des Ursprungs abhängen, denn dieser ist ja nicht a priori gegeben. Häufig kann der Ursprung mit idealisierten Beobachtern identifiziert werden und die übrigen Punkte als Ereignisse, falls sie beobachtet werden. Typischerweise interessieren uns Beziehungen zwischen unterschiedlichen Ereignissen, deren relative Lage durch einen Verbindungsvektor beschrieben wird, der natürlich nicht von Wahl des Ursprungs abhängt. Wir können die im Tripel genannte Abbildung  $Z$  besser verstehen, nämlich als Operation  $\oplus : \mathcal{P} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ , die folgendermaßen charakterisiert ist: Für  $p, q \in \mathcal{P}$  und  $v, w \in \mathcal{V}$  gilt

- (a)  $p \oplus 0_{\mathcal{V}} = p$ ,
- (b)  $(p \oplus v) \oplus w = p \oplus (v + w)$ ,
- (c) Je zwei Punkte  $p, q$  bestimmen eindeutig einen Vektor  $v: q = p \oplus v$ .

Hierbei bezeichnet  $0_{\mathcal{V}}$  den Nullvektor in  $\mathcal{V}$ , und  $+$  ist die übliche Vektoraddition in  $\mathcal{V}$ . Da wir bereits geklärt haben, daß es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Punkten und Vektoren gibt, dürfen wir die etwas barock anmutenden Unterscheidung zwischen der Operation  $\oplus$  und der Vektoraddition fallen lassen, was wir so gleich tun wollen. Ein affiner Raum wird dann oft als Tripel  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V}, +)$  notiert. Schließlich bleibt zu betonen, daß lediglich die Differenz zweier Punkte (ein Verbindungsvektor) aber nicht deren Summe definiert ist.

Wir wollen nun den affinen Raum  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V}, +)$ , genauer  $\mathcal{V}$ , mit geometrischer Struktur versehen. Deren Bedeutung für unser Naturverständnis kann kaum überschätzt werden. Ein Großteil unserer Intuition und unserer Interpretation von physikalischen Beziehungen ist durch diese Struktur gegeben. Im folgenden bezeichne  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen,  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen und  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) die Menge aller  $n$ -Tupel reeller Zahlen.

**Konzept 1.1.2 — Symmetrische Bilinearform.** Eine Abbildung  $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **symmetrische Bilinearform** auf dem Vektorraum  $\mathcal{V}$ , wenn für  $v, w, u \in \mathcal{V}$  und  $a, c \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $B(v, w) = B(w, v)$ ,
- (2)  $B(av + cw, u) = aB(v, u) + cB(w, u)$ .

$B$  heißt

- (a) **nicht entartet**, wenn  $B(v, w) = 0$  für alle  $w \in \mathcal{V}$  impliziert, daß  $v = 0$ .
- (b) **positiv definit**, wenn  $v \neq 0$  impliziert, daß  $B(v, v) > 0$ .

Die Abbildung  $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $Q(v) := B(v, v)$ , heißt die durch  $B$  erzeugte **quadratische Form**.

Offenbar gilt für  $v \in \mathcal{V}$  und  $a \in \mathbb{R}$ :  $Q(ax) = a^2Q(x)$ . Für alle Vektoren  $v \in \mathcal{V}$  gilt  $0_{\mathbb{R}}v = 0_{\mathcal{V}}$ , wobei  $0_{\mathbb{R}}$  das Nullelement des Zahlenkörpers  $\mathbb{R}$  bezeichne und  $0_{\mathcal{V}}$  den Nullvektor in  $\mathcal{V}$ . Daher ist  $Q(0_{\mathcal{V}}) = Q(0_{\mathbb{R}}v) = 0_{\mathbb{R}}Q(v) = 0_{\mathbb{R}}$ . Wird  $Q$  von einer positiv-definiten Bilinearform erzeugt, so impliziert  $Q(v) = 0_{\mathbb{R}}$ , daß  $v = 0_{\mathcal{V}}$ , denn andernfalls müsste wegen (b) ja  $Q > 0_{\mathbb{R}}$  gelten. Mit anderen Worten: Eine positiv-definite symmetrische Bilinearform  $B$  auf dem Vektorraum  $\mathcal{V}$  erzeugt eine quadratische Form auf  $\mathcal{V}$  mit  $Q(v) \geq 0_{\mathbb{R}}$  für alle

$v \in \mathcal{V}$ , wobei  $Q(v) = 0_{\mathbb{R}}$  genau dann, wenn  $v = 0_{\mathcal{V}}$ .

**Konzept 1.1.3 — Skalarprodukt.** Ein **Skalarprodukt**  $g$  auf einem Vektorraum  $\mathcal{V}$  ist eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathcal{V}$ . Ein positiv-definites Skalarprodukt auf  $\mathcal{V}$  heißt ein **inneres Produkt** auf  $\mathcal{V}$ .

Das geordnete Paar  $(\mathcal{V}, g)$  heißt ein **Prähilbertraum**. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt ein **Hilbertraum**.

Häufig verwenden wir auch die Notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für ein inneres Produkt, also  $g(v, w) \equiv \langle v, w \rangle$  für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ .

Geometrische Betrachtungen werden besonders anschaulich, wenn die Norm durch ein inneres Produkt erzeugt wird. Damit ist dann auch ein anschaulicher Abstandsbegriff verbunden.

**Konzept 1.1.4 — Norm.** Eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$  heißt eine **Norm** auf dem Vektorraum  $\mathcal{V}$ , wenn gilt

- (1)  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  gilt (Positivität),
- (2)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  für alle  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Positive Homogenität),
- (3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  für alle  $v, w \in \mathcal{V}$  (Dreiecksungleichung).

Das geordnete Paar  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  heißt ein **normierter Raum**.

Bevor wir klären, wie ein inneres Produkt eine Norm erzeugt, benötigen wir die

**Aussage 1.1.1 — Schwarzsche Ungleichung.** Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt auf dem Vektorraum  $\mathcal{V}$  und  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$  die durch  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$  erklärte Funktion<sup>a</sup>, so gilt für alle  $v, w \in \mathcal{V}$  die **Schwarzsche Ungleichung**:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|. \quad (1.1)$$

In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind. Es gilt  $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\|$  genau dann, wenn  $v = \lambda w$  oder  $w = \lambda v$  mit einem  $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0$  gilt.

<sup>a</sup>Wir benutzen hier die für die Norm reservierte Bezeichnung, weil sich weiter unten herausstellen wird, daß es sich tatsächlich um eine Norm handelt. In der Begründung der Aussage wird aber lediglich die angegebene Definition benutzt.

**Begründung:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $v, w \neq 0_{\mathcal{V}}$ . Für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$0 \leq \|v + tw\|^2 = \langle v + tw, v + tw \rangle = \|v\|^2 + t^2 \|w\|^2 + 2t \langle v, w \rangle. \quad (1.2)$$

Dieses quadratische Polynom in  $t$  ist also auf ganz  $\mathbb{R}$  nichtnegativ, das heißt es besitzt entweder keine oder eine doppelte Nullstelle. Die möglichen Nullstellen sind durch

$$t_{\pm} = \frac{1}{\|w\|^2} \left( -\langle v, w \rangle \pm \sqrt{\langle v, w \rangle^2 - \|v\|^2 \|w\|^2} \right) \quad (1.3)$$

gegeben. Also muß  $\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$  gelten. Für das Gleichheitszeichen liegt eine doppelte Nullstelle bei  $t_0 = -\langle v, w \rangle / \|w\|^2$  vor, sonst gibt es keine reelle Nullstelle. Folglich gilt  $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$  für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ . Mit  $\sigma \in \{-1, 1\}$  ist  $|\langle v, w \rangle| = \sigma \langle v, w \rangle$ . Wegen der Bilinearität des inneren Produktes und der positiven Homogenität der Funktion  $\|\cdot\|$

folgt

$$|\langle v, w \rangle| = \sigma \langle v, w \rangle = \langle v, \sigma w \rangle \leq \|v\| \|\sigma w\| = \|v\| \|w\|, \quad (1.4)$$

also die Schwarzsche Ungleichung.

Sind  $v$  und  $w$  linear abhängig, so gilt in der Schwarzschen Ungleichung offenbar die Gleichheit. Gilt sogar  $v = \lambda w$  oder  $w = \lambda v$  mit  $\lambda \geq 0$ , so gilt die Gleichheit ohne Betragsstriche.

Es gelte nun  $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\|$ . Ist  $w = 0_{\mathcal{V}}$ , so ist  $w = 0_{\mathbb{R}} v$  und somit ist die Behauptung korrekt. Sei also  $w \neq 0_{\mathcal{V}}$ . Wegen  $\langle v, w \rangle^2 = \|v\|^2 \|w\|^2$  hat das oben betrachtete quadratische Polynom in  $t$  eine doppelte Nullstelle  $t_0$ . Somit ist  $\|v + t_0 w\| = 0_{\mathbb{R}}$  für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ , das heißt  $v = -t_0 w$ , wobei wegen  $-t_0 \langle w, w \rangle = \langle w, -t_0 w \rangle = \langle w, v \rangle \geq 0_{\mathbb{R}}$  folgt  $v = \lambda w$  mit  $\lambda = -t_0 = + \langle v, w \rangle / \|w\|^2 \geq 0_{\mathbb{R}}$ .

Sei nun  $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ . Wählen wir  $\sigma \in \{-1, 1\}$  wie oben, so gilt wegen der Bilinearität des inneren Produktes  $|\langle v, w \rangle| = \sigma \langle v, w \rangle = \langle \sigma v, w \rangle = \|\sigma v\| \|w\|$ . Nach dem eben bewiesenen ist entweder  $w = 0_{\mathcal{V}}$ , oder es gibt ein  $\lambda \geq 0_{\mathbb{R}}$  mit  $\sigma v = \lambda w$ , also  $v = \sigma \lambda w$ . In beiden Fällen sind  $v$  und  $w$  linear abhängig. ■

**Aussage 1.1.2** Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt auf dem Vektorraum  $\mathcal{V}$ , so ist durch  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$  eine Norm auf  $\mathcal{V}$  erklärt.

**Begründung:** Wir rechnen  $\|0_{\mathcal{V}}\| = Q^{1/2}(0_{\mathcal{V}})$ , wobei  $Q$  die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte quadratische Form bezeichne. Es gilt  $Q(0_{\mathcal{V}}) = Q(0_{\mathbb{R}} v) = 0_{\mathbb{R}} Q(v) = 0_{\mathbb{R}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathcal{V}$ . Also ist  $\|0_{\mathcal{V}}\| = 0$ . Gilt umgekehrt, daß  $Q(v) = 0$ , so folgt aus der positiven Definitheit des inneren Produktes, daß  $v = 0_{\mathcal{V}}$  sein muß, denn  $Q(v) > 0$  für alle  $v \neq 0_{\mathcal{V}}$ . Somit erfüllt  $\|\cdot\|$  die als Positivität bekannte Anforderung.

Für  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathcal{V}$  gilt  $\|\lambda v\| = Q^{1/2}(\lambda v)$ . Da  $Q$  eine quadratische Form ist,  $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ , woraus folgt, daß  $\|\cdot\|$  die als positive Homogenität bekannte Anforderung erfüllt.

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt für alle  $v, w \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|v\| \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Hieraus folgt durch Wurzelziehen die Dreiecksungleichung. ■

Schließlich stiftet das Skalarprodukt über den Längenbegriff (Norm) auch einen anschaulichen Abstands begriff (Metrik). Zunächst das

**Konzept 1.1.5 — Metrik.** Sei  $\mathcal{V}$  ein (reeller) Vektorraum. Eine Abbildung  $d: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$  heißt eine **Metrik** auf  $\mathcal{V}$ , wenn für alle  $v, w, r \in \mathcal{V}$  gilt:

- (1)  $d(v, w) = 0$  genau dann, wenn  $v = w$  (Positivität),
- (2)  $d(v, w) = d(w, v)$  (Symmetrie),
- (3)  $d(v, w) \leq d(v, r) + d(r, w)$  (Dreiecksungleichung).



Das geordnete Paar  $(\mathcal{V}, d)$  heißt ein metrischer Raum.

Wir haben hier das Metrik-Konzept unnötig eingeschränkt, eigentlich bedarf es lediglich einer beliebigen Menge, aber in der Mechanik werden wir es in der Regel mit Vektorräumen zu tun haben, die mit einer Metrik versehen sind.

**Aussage 1.1.3** Ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathcal{V}$ , so ist durch  $d(v, w) := \|v - w\|$  eine Metrik auf  $\mathcal{V}$  erklärt.

**Begründung:** Es gilt  $d(v, v) = \|0_{\mathcal{V}}\| = \|0_{\mathbb{R}}v\| = 0_{\mathbb{R}}\|v\| = 0$  für alle  $v \in \mathcal{V}$ . Ist umgekehrt  $d(v, w) = 0$  so folgt aus dem Wertebereich der Norm und ihrer Positivität, daß  $v - w = 0_{\mathcal{V}}$  und damit  $v = w$ . Somit hat  $d$  die mit Positivität bezeichnete Eigenschaft.

Wegen der positiven Homogenität der Norm gilt  $d(v, w) = \|v - w\| = \|-1(w - v)\| = |-1|\|w - v\| = d(w, v)$ . Also ist  $d$  symmetrisch.

Für alle  $v, w, r \in \mathcal{V}$  gilt wegen der Dreiecksungleichung für die Norm  $d(v, r) + d(r, w) = \|v - r\| + \|r - w\| \geq \|v - r + r - w\| = \|v - w\| = d(v, w)$ , und das ist die Dreiecksungleichung für die Metrik. ■

Insbesondere finden wir: Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt auf dem (reellen) Vektorraum  $\mathcal{V}$ , so ist durch  $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$  eine Norm (Längenbegriff) und durch  $d(v, w) = \|v - w\| = \langle v - w, v - w \rangle^{1/2}$  eine Metrik (Abstands-begriff) erklärt. **Beachten Sie, daß  $d$  keine Bilinearform ist, im Gegensatz zum Skalarprodukt<sup>1</sup>.** Ein inneres Produkt erzeugt also ein Längen- und Abstandskonzept. Diese quasi gestifteten geometrischen Konzepte werden häufig als Kernelemente der in der Natur realisierten Geometrie angenommen (im Einklang mit Beobachtungen und Experimenten).

**Konzept 1.1.6 — Euklidischer Vektorraum.** Ein geordnetes Paar  $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bestehend aus einem reellen Vektorraum  $\mathcal{V}$  und einem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt **euklidischer Vektorraum**  $\mathbb{E}$ . Ein affines Tripel  $(\mathcal{P}, \mathbb{E}, +)$  heißt **euklidisch-affiner Raum**.

Es ist nützlich, einen affinen Raum mit Koordinaten auszustatten. Sei also  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V}, +)$  ein affiner Raum über einen kommutativen Körper  $\mathbb{K}^2$  mit  $n := \text{Dim}(\mathcal{A}) < \infty$ .

**Konzept 1.1.7 — Koordinatensystem.** Ein geordnetes  $(n + 1)$ -Tupel  $(O, p_1, \dots, p_n)$  von Punkten aus  $\mathcal{P}$  heißt ein **Koordinatensystem** von  $\mathcal{A}$ , wenn die Vektoren  $\underline{Op}_1, \dots, \underline{Op}_n$  linear unabhängig sind und somit eine Basis von  $\mathcal{V}$  bilden. Es heißt dann  $O$  der **Ursprung** des Koordinatensystems, und die  $\underline{Op}_1, \dots, \underline{Op}_n$  werden Basisvektoren genannt.

Jedem Punkt  $q \in \mathcal{P}$  können hinsichtlich eines Koordinatensystems mit Ursprung  $O$  und Basis  $\{\underline{Op}_1, \dots, \underline{Op}_n\}$  umkehrbar eindeutig  $n$  Skalare  $q^1, \dots, q^n \in \mathbb{K}$  zugeordnet werden:

<sup>1</sup> In der Physik wird statt von einem Skalarprodukt häufig von einer Metrik gesprochen. Dies ist ungemein irreführend. Sinnvoll wäre von einem metrischen Tensor zu sprechen, denn dies unterstreicht, daß es sich um eine bilineare Abbildung handelt. Eine Metrik braucht diese Eigenschaft nicht zu besitzen, wie das Beispiel der euklidischen Metrik zeigt.

<sup>2</sup> In der klassischen Physik wird dies  $\mathbb{R}$  sein, aus Bequemlichkeit kommt aber auch  $\mathbb{C}$  vor.

Der Vektor  $\underline{Oq}$  besitzt die Basisdarstellung

$$\underline{Oq} = \sum_{a \in \mathcal{J}(n)} q^a \underline{Op}_a. \quad (1.6)$$

Betrachten wir zwei idealisierte Ereignisse an den Punkten  $r, s \in \mathcal{P}$ , so hat der Verbindungsvektor  $\underline{rs}$  relativ zum gewählten Koordinatensystem die Darstellung

$$\underline{rs} = \underline{Os} - \underline{Or} = \sum_{a \in \mathcal{J}(n)} (s^a - r^a) \underline{Op}_a. \quad (1.7)$$

Es seien jetzt  $(O, p_1, \dots, p_n)$  und  $(O', p'_1, \dots, p'_n)$  zwei Koordinatensysteme von  $\mathcal{A}$ . Der Basistransformation  $\{\underline{Op}_1, \dots, \underline{Op}_n\} \rightarrow \{\underline{O'p}'_1, \dots, \underline{O'p}'_n\}$  von  $\mathcal{V}$  entspricht dann eine Transformationsmatrix  $T = ({}_aT^b)$  ( $a, b \in \mathcal{J}(n)$ ), die durch die Gleichungen

$$\underline{O'p}'_a = \sum_{b \in \mathcal{J}(n)} {}_aT^b \underline{Op}_b \quad (1.8)$$

bestimmt ist. Außerdem besitzt der Ursprung  $O'$  des gestrichenen Koordinatensystems hinsichtlich des ungestrichenen Koordinatensystems  $n$  durch die Gleichungen

$$\underline{OO'} = \sum_{a \in \mathcal{J}(n)} s^a \underline{Op}_a \quad (1.9)$$

bestimme Koordinaten  $s^1, \dots, s^n$ , die Verschiebung des Ursprungs charakterisieren. Der Transformation  $(O, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (O', p'_1, \dots, p'_n)$  dieser Koordinatensysteme entspricht also eine reguläre Matrix  $T$  und ein  $n$ -Tupel  $(s^1, \dots, s^n)$ . Sind umgekehrt eine reguläre Matrix  $T$  und ein  $n$ -Tupel  $(s^1, \dots, s^n)$  sowie ein Koordinatensystem  $(O, p_1, \dots, p_n)$  gegeben, so ist hierdurch ein neues Koordinatensystem  $(O', p'_1, \dots, p'_n)$  eindeutig festgelegt: Der Ursprung  $O'$  ergibt sich aus (1.9), und die Basisvektoren  $\{\underline{O'p}'_1, \dots, \underline{O'p}'_n\}$  sind danach durch (1.8) bestimmt.

Ein fester Punkt  $q \in \mathcal{P}$  besitzt hinsichtlich der Koordinatensysteme  $(O, p_1, \dots, p_n)$  und  $(O', p'_1, \dots, p'_n)$  verschiedene Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$  und  $q'^1, \dots, q'^n$ . Es gilt dann einerseits

$$\underline{Oq} = \sum_{a \in \mathcal{J}(n)} q^a \underline{Op}_a, \quad (1.10)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \underline{Oq} &= \underline{OO'} + \underline{O'q} = \sum_{a \in \mathcal{J}(n)} s^a \underline{Op}_a + \sum_{b \in \mathcal{J}(n)} q'^b \underline{O'p}'_b = \\ &= \sum_{a \in \mathcal{J}(n)} \left( s^a + \sum_{b \in \mathcal{J}(n)} q'^b {}_bT^a \right) \underline{Op}_a. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Hieraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die

**Aussage 1.1.4 — Transformationsformel.** Einer Transformation  $(O, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (O', p'_1, \dots, p'_n)$  zweier Koordinatensysteme von  $\mathcal{A}$  entsprechen vermöge der Gleichungen (1.8) und (1.9) eindeutig eine Transformationsmatrix  $T = ({}_aT^b)$  ( $c, d \in \mathcal{J}(n)$ ) und

ein  $n$ -Tupel  $(s^1, \dots, s^n)$ . Die zugehörige Koordinatentransformation ist dann

$$q^a = s^a + \sum_{b \in \mathcal{I}(n)} q'^b {}_b T^a. \quad (1.12)$$

Ist der affine Raum mit einer euklidischen Struktur ausgestattet, dann gibt es folgendes nützliche

**Konzept 1.1.8 — Kartesisches Koordinatensystem.** Sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V}, +)$  euklidisch-affiner Raum der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Ein Koordinatensystem  $(O, p_1, \dots, p_n)$  von  $\mathcal{A}$  heißt **kartesisches Koordinatensystem**, wenn  $\{\underline{Op}_1, \dots, \underline{Op}_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$  ist.

Beachten Sie, daß erst die euklidische Struktur Begriffe wie senkrecht und normiert bereitstellt, per se haben diese Konzepte in einem lediglich affinen Raum keine Bedeutung.

Die bisher verwendete Notation unterstreicht die affine Leitidee, ist aber unnötig barock für das alltägliche Arbeiten. Sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V}, +)$  ein affiner Raum mit  $\text{Dim}(\mathcal{A}) < \infty$  und  $(O, p_1, \dots, p_n)$  ( $p_a \in \mathcal{P}$ ,  $a \in \mathcal{I}(n)$ ) ein Koordinatensystem von  $\mathcal{A}$ . Wir setzen  $e_a := \underline{Op}_a \in \mathcal{V}$  für die zugehörigen Basisvektoren. Hat ein Punkt  $q \in \mathcal{P}$  relativ zu  $(O, p_1, \dots, p_n)$  die Koordinaten  $(q^1, \dots, q^n)$ , so ist sein Ortsvektor  $\underline{Oq} = q^a e_a \in \mathcal{V}$ , wobei wir hier über den doppelt auftretenden Index vereinbarungsgemäß automatisch summieren und uns das Summenzeichen sparen. Schließlich verzichten wir auch darauf, jeden Vektor explizit mit seinem Anfangspunkt (dem Ursprung) zu notieren, da dieser ja, einmal gewählt, für alle Vektoren der derselbe ist:  $q = q^a e_a \in \mathcal{V}$ . Mit diesen Konventionen gilt für das euklidische innere Produkt zweier Vektoren  $v, w \in \mathcal{V}$  einfach  $g(v, w) \equiv \langle v, w \rangle = \langle v^a e_a, v^b e_b \rangle = v^a \langle e_a, e_b \rangle v^b = v^a g_{ab} w^b$  relativ zum gewählten kartesischen Koordinatensystem in  $\mathcal{A}$ . Für die inverse Funktion  $g^{-1}$  schreiben wir vereinbarungsgemäß  $g^{ab}$  in Komponenten, also  $g^{-1}g = \text{id}$  ist gleichbedeutend mit  $g^{ac} g_{cb} = \delta_b^a$ , wobei  $\delta$  die charakteristische Funktion der Diagonalmenge  $\{(a, b) \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{A})) \times \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{A})) : a = b\}$  bezeichnet. In einem kartesischen Koordinatensystem ist  $g_{ab} = \delta_{ab}$ .

Es ist klar, daß wir uns wegen der umkehrbar eindeutigen Zuordnung von Punkten und Vektoren eines affinen Raums mit einem Koordinatensystem von  $\mathcal{V}$  ein Bild von  $\mathcal{P}$  machen können. Deswegen sprechen wir ja auch einfach von einem Koordinatensystem von  $\mathcal{A}$ . Die Punktmenge erlaubt uns einen Punkt in ihr als Ursprung hervorzuheben ohne dadurch einen Vektor auszuzeichnen. Genau dieser Umstand hilft später bei der Formulierung von Relativitätsprinzipien und rechtfertigt damit den von uns betriebenen Aufwand. Vielleicht tröstet uns zum Schluß folgende elegantere Reformulierung:

**Konzept 1.1.9 — Koordinatensystem.** Sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathbb{E}, +)$  ein euklidisch-affiner Raum, wobei  $\mathcal{P}$  einen topologischen Raum bezeichne. Ein **Koordinatensystem** oder eine **Karte** in  $\mathcal{A}$  ist ein Homomorphismus  $\zeta$  von einer in  $\mathcal{P}$  offenen Menge  $\mathcal{U}$  nach einer in  $\mathbb{E}$  offenen Menge  $\zeta(\mathcal{U})$ . Für jedes  $p \in \mathcal{U}$  sei  $\zeta(p) = (x^1(p), \dots, x^{\text{Dim}(\mathcal{A})}(p))$ . Die Funktionen  $x^a : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  heißen die Koordinatenfunktionen von  $\zeta$ .

**Konzept 1.1.10 — Verträglichkeit.** Zwei Koordinatensysteme  $\zeta, \eta$  in  $\mathcal{A}$  heißen **miteinander verträglich**, wenn die Kompositionen  $\zeta \circ \eta^{-1}$  und  $\eta \circ \zeta^{-1}$  glatt sind. Expliziter: Seien  $\zeta : \mathcal{U} \subset \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{E}$  und  $\eta : \mathcal{U}' \subset \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{E}$  Koordinatensysteme mit  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ .

Dann ist  $\zeta \circ \eta^{-1} : \eta(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \rightarrow \zeta(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \subset \mathbb{E}$  und  $\eta \circ \zeta^{-1}$  geht in die umgekehrte Richtung. Ist der Durchschnitt von  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{U}'$  leer, so werden obige Kompositionen vereinbarungsgemäß als glatt bezeichnet.

Beachten Sie, daß Glattheit hier im gewöhnlichen euklidischen Sinn gemeint ist.

## 1.2 Galilei-Raumzeit & Relativitätsprinzip

Der Begriff des Raumes ist in der Klassischen Mechanik untrennbar mit der euklidischen Geometrie verbunden.

**Konzept 1.2.1 — Raum.** Der **Raum** ist ein dreidimensionaler, orientierter euklidischer Raum  $\mathbb{E}$ .

Lassen wir im Moment das Orientierungskonzept außen vor, so ist die Struktur des Raumes also durch eine Zahl, nämlich die Dimension, und durch ein inneres Produkt festgelegt. Beides sind Erfahrungstatsachen, die mit Beobachtungen und Experimente mit einer gegebenen maximalen Genauigkeit übereinstimmen. Während die Gesamtheit der von Menschen beobachteten Phänomene keine weiteren räumlichen Dimensionen erfordern, sind wir seit etwa hundert Jahren in der Lage, die Domäne der euklidischen Geometrie durch kosmologische Beobachtungen wesentlich einzuschränken. Außerdem spricht die Newtonsche Mechanik nur räumlichen Konfigurationen (Orte, relative Lagen) eine elementare physikalische Realität zu, während Zeit zu einem Dasein als Parameter verdammt ist. Dies macht es so schwer, von einer Raumzeit in der Newtonschen Physik zu sprechen. Das Raumzeit-Konzept der Newtonschen Domäne nach Galilei vermag sich nur halbherzig an dem modernen Raumzeit-Begriff zu orientieren, was zu einer recht unfeinen Präzisierung mit groben Schwachstellen führt. Es ist aber überaus wichtig, dieses Konzept so gut wie möglich auszuformulieren, denn die Gesetze der Physik können nicht losgelöst von einem Raumzeit-Begriff betrachtet werden, jedenfalls nicht wenn die Betrachtung einem hinreichend tiefen Verständnis dienen soll.

**Konzept 1.2.2 — Zeit.** Die **Zeit** wird durch einen eindimensionalen, orientierten euklidischen Raum beschrieben, der durch das Kontinuum  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen repräsentiert ist unter Verwendung der Ordnung  $\leq$  auf  $\mathbb{R}$  als Orientierung und des üblichen Abstands von Zahlen.

Das war doch nicht so schwer. Gewiß, aber das Zusammenfügen von Raum und Zeit zur Raumzeit der Newtonschen Domäne, der sogenannten Galilei-Raumzeit, ist das Problem.

**Konzept 1.2.3 — Galilei-Raumzeit.** Eine **Galilei-Raumzeit** ist ein vierdimensionaler affiner Raum  $\mathcal{G} = (\overline{\mathcal{P}}, \mathcal{V}, +)$ , bestehend aus einer Menge  $\overline{\mathcal{P}} = \mathbb{R} \times \mathcal{P}$  mit  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3$  von punktförmigen Raumzeit-Ereignissen, einem Vektorraum  $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{E}$  und der üblichen Zuordnung, zusammen mit einer Linearform  $\Delta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , auf deren Kern  $\mathbb{E}_0 := \text{Kern} \Delta := \{v \in \mathcal{V} : \Delta(v) = 0\}$  ein euklidisches inneres Produkt gegeben ist, welches  $\mathbb{E}_0$  zu einem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum macht.

Zu zwei punktförmigen Raumzeit-Ereignissen  $p, q \in \overline{\mathcal{P}}$  ist  $\Delta(\underline{pq})$  der objektive Zeitunterschied, denn  $\Delta(\underline{pq}) = \Delta(\underline{pO} + \underline{Oq}) = \Delta(-\underline{Op} + \underline{Oq}) = \Delta(\underline{Oq}) - \Delta(\underline{Op}) = t_q - t_p$ , weil  $\mathcal{G}$  ein affiner Raum ist und  $\Delta$  eine Linearform. Die Fasern  $\Delta^{-1}(t) = (t, \mathbb{E}) =: \mathbb{E}_t$

beschreiben in  $\mathcal{V}$  und damit in  $\mathcal{G}$  Schichten gleicher Zeit, welche durch die euklidische Metrik von  $\mathbb{E}_0$  ebenfalls eine euklidische Metrik erhalten: Seien  $a, b \in \mathcal{G}$  aus der gleichen Zeitschicht, sagen wir  $\underline{Oa}, \underline{Ob} \in \mathbb{E}_t$ , dann gilt  $\Delta(\underline{ab}) = 0$  und damit  $\underline{ab} \in \mathbb{E}_0$ . Daher ist  $d(a, b) := \|\underline{ab}\| = \|\underline{aO} + \underline{Ob}\| \|\underline{Ob} - \underline{Oa}\|$  wohldefiniert. Durch diese Metrik auf  $\mathbb{E}_t$  wird also der Abstand von Ereignissen in einer Zeitschicht festgelegt. Ereignissen aus unterschiedlichen Zeitschichten wird kein Abstand zugeordnet. Das Konzept des Raumzeit-Abstandes wird erst mit der speziellen Relativitätstheorie Bestandteil der Physik-Folklore.

Gegeben sein ein einziger Körper in  $\mathcal{G}$ . Der Körper besteht aus Punkten in  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3$  und kann mittels der auf  $\mathbb{E}_t \subset \mathcal{V}$  gegebenen Geometrie für unsere Zwecke hinreichend gut zu allen Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  beschrieben werden. Alle Körper haben die Eigenschaft, eine sogenannte **Massendichte**  $\rho$  zu haben. Deren Träger ist die Menge  $\mathcal{K}_t \subset \mathbb{E}_t$ , bestehend aus allen Vektoren, deren Endpunkte im Körper liegen. Die **Gesamtmasse**  $m$  des Körpers ist somit

$$m = \int_{\mathcal{K}_t} \text{vol } \rho(\underline{Op}) = \int_{\mathbb{E}} \text{vol } \chi_{\mathcal{K}_t}(\underline{Op}) \rho(\underline{Op}), \quad (1.13)$$

wobei  $\chi_{\mathcal{K}_t} : \mathbb{E} \rightarrow \{0, 1\}$  die Indikatorfunktion der Teilmenge  $\mathcal{K}_t$  bezeichne. Der **Schwerpunkt**  $r_S \in \mathbb{E}_t$  eines Körpers ist das Verhältnis

$$r_S \stackrel{\text{def}}{=} m^{-1} \int_{\mathcal{K}_t} \text{vol } \rho(\underline{Op}) \underline{Op}, \quad (1.14)$$

also der Mittelwert aller mit der Massendichte gewichteten Punkte des Körpers. Ein wichtiger Spezialfall ist  $\rho(r) = m\delta^{(3)}(r - r_S)$ . Dann ist der Träger der Massendichte durch einen einzigen Punkt gegeben, den Schwerpunkt, in dem die Gesamtmasse konzentriert ist. Der Körper ist dann durch diese als **Punktmasse** bezeichnete Idealisierung gegeben. Punktmassen gibt es wohl nicht in der Natur: In der klassischen Naturbeschreibung sind sie immer Idealisierungen ausgedehnter Körper, deren Ausdehnung aber für die Fragestellung (verbunden mit einem gegebenen Genauigkeitsbereich) keine Rolle spielt. In der nichtklassischen Beschreibung tauchen sie im Zusammenhang mit ultralokalen Konzepten auf, die nicht durch Messungen falsifiziert werden können und daher keinen anständigen Bestandteil einer physikalischen Theorie darstellen können.

Punktmassen liegen prinzipiell auf Kurven in der Galilei-Raumzeit.

**Konzept 1.2.4 — Kurven.** Eine **Kurve** in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  ist eine stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{G}$ , wobei  $\mathcal{I}$  ein uneigentliches Intervall von  $\mathbb{R}$  oder sogar ganz  $\mathbb{R}$  sein darf.

Bitte beachten Sie, daß wir hier noch nicht von Bewegungen sprechen. Streng genommen ist  $\gamma$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^3$ , aber obiger Sprachgebrauch hat sich eingebürgert. Eigentlich wäre es geschickter, die Menge  $\{(t, \gamma(t)) : t \in \mathcal{I}\}$  als Kurve in  $\mathcal{G}$  zu bezeichnen. Für die nichtrelativistische Mechanik führt dies aber zu Interpretationsproblemen, die wir hier nicht vertiefen können. Wir fahren fort mit dem

**Konzept 1.2.5 — Geschwindigkeitsvektor.** Sei  $\gamma : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  eine Kurve in der

Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Der Geschwindigkeitsvektor von  $\gamma$  zu  $t \in \mathcal{I}$  ist

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \left. \frac{d}{du} \gamma(u) \right|_t. \quad (1.15)$$

Intuitiv ist  $\dot{\gamma}(t)$  die vektorielle Änderungsrate der Kurve  $\gamma$  zu  $t \in \mathcal{I}$ . Üblich sind auch folgende Schreibweisen:  $\dot{\gamma}(\gamma(t))$  oder  $\dot{\gamma}_{\gamma(t)}$  für die Geschwindigkeit entlang der Kurve  $\gamma$  zur Zeit (falls wir den Kurvenparameter so nennen)  $t \in \mathcal{I}$  oder am Punkt  $\gamma(t)$  der Kurve. Nützlich zum Rechnen ist folgendes

**Konzept 1.2.6 — Geschwindigkeit dargestellt in Koordinaten.** Sei  $x^1, x^2, x^3$  ein räumliches Koordinatensystem in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R} \times \mathbb{E}, +)$  am Punkt  $\gamma(t) \in \mathbb{E}$  der Kurve  $\gamma$ . Der Geschwindigkeitsvektor an diesem Punkt hat die Koordinatendarstellung

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \sum_{a \in \mathcal{I}(3)} \left. \frac{d(x^a \circ \gamma)}{du} \right|_t e_a|_{\gamma(t)}. \quad (1.16)$$

Hierfür schreiben wir auch salopper:  $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^a(\gamma(t)) e_a(\gamma(t))$ . Beachten Sie, daß auch die Basisvektoren  $e^a (a \in \mathcal{I}(3))$  am Punkt  $\gamma(t)$  der Kurve  $\gamma$  ausgewertet werden müssen, da die Basis im allgemeinen nur eine lokale und eben keine globale ist. Dies ist von entscheidender Bedeutung für das sich natürlich anschließende Beschleunigungskonzept. Zunächst gilt in einer globalen Basis einfach  $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^a(\gamma(t)) e_a$ . Aber für eine lokale Basis muß erklärt werden, wie ein lokaler Basisvektor entlang einer Kurve nach dem Kurvenparameter differenziert wird. Ein lokaler Basisvektor ist ja ein Vektorfeld in der Galilei-Raumzeit, also eine Abbildung, die jedem Raumzeitpunkt einen Basisvektor zuordnet. Die vektorielle Änderungsrate eines solchen Vektorfeldes mag Ihnen zuvor nie begegnet sein. Vermutlich haben Sie bis dato wohl lediglich Funktionen differenziert, aber keine Vektorfelder entlang irgendwelcher Kurven nach deren Kurvenparameter.

Sei nun  $V$  ein Vektorfeld auf  $\mathcal{G}$ , also eine Abbildung  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \text{TR}^3 \cong \mathbb{E}$ . Hierbei bezeichnet  $\text{TR}^3$  die Vereinigung der Tangentialräume an allen Punkten in  $\mathbb{R}^3$ . Für uns ist im Moment nur interessant, daß dieses Bündel von Tangentialräumen mit  $\mathbb{E}$  identifiziert werden kann. Zusätzliche Qualifikationen des Vektorfeldes wie Glattheit werden durch die entsprechenden Eigenschaften der Komponenten (das sind Funktionen auf der Galilei-Raumzeit) geerbt. Uns interessiert, wie sich  $V(\gamma(t))$  mit dem Kurvenparameter  $t \in \mathcal{I}$  ändert. Es liegt nahe, ist aber nicht zwingend, den Kurvenparameter Zeit zu nennen. Sei  $(\mathcal{U}, \zeta)$  ein (lokales) Koordinatensystem in  $\mathcal{G}$  mit der offenen Koordinatendomäne  $\mathcal{U}$  und den Koordinatenfunktionen  $x^a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} (a \in \mathcal{I}(3))$  des Homomorphismus  $\zeta$ . Relativ zu diesem Koordinatensystem ist die vektorielle Änderungsrate von  $V$  entlang der Kurve  $\gamma$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathcal{I}$  gerade

$$\dot{V}(\gamma(t)) = \sum_{a \in \mathcal{I}(3)} \dot{x}^a(\gamma(t)) \partial_a V(\gamma(t)), \quad (1.17)$$

wobei  $\partial_a$  die partielle Ableitung in Richtung der Koordinatenlinie  $x^a$  bezeichnet. Dies bedeutet, daß die zeitliche Änderung eines Vektorfeldes entlang einer mit der Zeit parametrisierten Kurve gerade die räumliche Änderung des Vektorfeldes in Richtung des Geschwindigkeitsvektors der Kurve am betreffenden Kurvenpunkt ist. Da die Leibniz-Regel eine so vortreffliche Charakterisierung der partiellen Ableitung ist, fordern wir auch

wieder

$$(\dot{x}^a \partial_a) V = (\dot{x}^a \partial_a)(V^b e_b) = \left( (\dot{x}^a \partial_a) V^b \right) e_b + V^b (\dot{x}^a \partial_a) e_b. \quad (1.18)$$

Wir haben hier alle Referenzen zur Auswertung unterdrückt, was besonders bei  $\dot{x}^a$  schmerzt, weil dies ja  $\dot{x}^a(\gamma(t))$  meint. Eine schöne Eigenschaft der Richtungsableitung  $(\dot{x}^a \partial_a)$  ist, daß sie die tensorielle Natur des Objektes, auf das sie operiert, nicht ändert. Notationstechnisch wäre es verlockend, folgendes zu vereinbaren:  $\nabla_{\dot{\gamma}} := (\dot{x}^a \partial_a)$ , was wir sogleich tun. Auch diese praktische Notation ist nicht vollkommen schmerzfrei. Die rechte Seite dieser Setzung hängt ja explizit von den verwendeten Koordinaten ab, was eher ungeschickt ist. Allerdings gilt für glatte Funktionen  $f$  auf der Galilei-Raumzeit:  $\nabla_{\dot{\gamma}} f = \langle \dot{\gamma}, \text{grad } f \rangle$ .

Eine Koordinaten-freie Charakterisierung muß abstrakt erfolgen. Da wir jetzt eine gute Anschauung haben, freuen wir uns darauf!

**Konzept 1.2.7 — Zusammenhang.** Sei  $\text{Vek}(\mathcal{G})$  der Raum der glatten Vektorfelder auf einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Ein **Zusammenhang**  $D$  auf  $\mathcal{G}$  ist eine Funktion  $D : \text{Vek}(\mathcal{G}) \times \text{Vek}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Vek}(\mathcal{G})$  so, daß gilt:

- (1)  $D_{fV}W = fD_VW$  für jede glatte Funktion  $f \in \text{Fun}(\mathcal{G})$  auf  $\mathcal{G}$  und  $V, W \in \text{Vek}(\mathcal{G})$ ,
- (2)  $D_V(aW) = aD_VW$  für jeden Skalar  $a \in \mathbb{K}$ ,
- (3)  $D_V(fW) = (\nabla_V f)W + fD_VW$ .

$D_VW$  heißt die **kovariante Ableitung** von  $W$  in Richtung  $V$  für den Zusammenhang  $D$ .

Offenbar ist die weiter oben eingeführte Richtungsableitung eine kovariante Ableitung. Wir können sogar aussagen, daß dieses Ableitungskonzept unter weiteren Forderungen eindeutig wird. Dazu müssen wir ein wenig ausholen. Für  $V, W \in \text{Vek}(\mathcal{G})$  sei  $[V, W] := \nabla_V W - \nabla_W V$  als Abbildung  $\text{Vek}(\mathcal{G}) \times \text{Vek}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Vek}(\mathcal{G})$ . Insbesondere gilt für Basisvektoren  $e_a$  die ungemein nützliche Beziehung  $[e_a, e_b] = 0$  für alle  $a, b \in \mathcal{I}(3)$ .

**Aussage 1.2.1** Auf einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  gibt es einen eindeutigen Zusammenhang  $D$  so, daß zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (4)  $[V, W] = D_VW - D_WV$ , und
- (5)  $D_X \langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle$ ,

für alle  $V, W, X \in \text{Vek}(\mathcal{G})$ .  $D$  heißt **Levi-Civita Zusammenhang** auf  $\mathcal{G}$  und ist durch die folgende Gleichung von Koszul charakterisiert:

$$2 \langle D_V W, X \rangle = \nabla_V \langle W, X \rangle + \nabla_W \langle X, V \rangle - \nabla_X \langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle. \quad (1.19)$$

**Begründung:** Sei  $D$  ein Zusammenhang auf der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ , der die Axiome (4) und (5) erfüllt. Auf der rechten Seite der Koszul-Gleichung benutzen wir (5) für die ersten drei Summanden und (4) für die letzten drei Summanden. Die meisten Terme heben sich paarweise auf und es bleibt  $2 \langle D_V W, X \rangle$ . Sei nun  $D'$  ein anderer Zusammenhang, der die Axiome (4) und (5) erfüllt. Es folgt  $\langle D_V W, X \rangle = \langle D'_V W, X \rangle$  für alle  $X \in \text{Vek}(\mathcal{G})$ . Sei  $\delta := D_V W - D'_V W$ . Dann gilt an jedem Punkt von  $\mathcal{G}$ , daß  $\langle \delta, X \rangle = 0$  für alle  $X \in \text{Vek}(\mathcal{G})$ . Weil das Skalarprodukt nicht entartet ist, folgt weiter  $\delta = 0$  und damit die behauptete Eindeutigkeit des Zusammenhangs auf  $\mathcal{G}$ .

Die Existenz eines solchen Zusammenhangs folgt aus der leicht zu verifizierenden Tatsache, daß  $\nabla$  die Axiome (1)-(5) erfüllt und damit eine explizite Realisierung darstellt. Wegen

der Eindeutigkeit ist dies der gesuchte Zusammenhang. Dies zeigt, daß die Konstruktion eines eindeutigen Zusammenhangs auf der Galilei-Raumzeit in dem Sinne trivial ist, als sie bereits aus unseren intuitiven Vorbemerkungen zusammen mit der eben bewiesenen Eindeutigkeit folgt. Wir vereinbaren sogleich, den Levi-Civita Zusammenhang weiterhin mit  $D$  zu bezeichnen.

Aus der Koszul-Gleichung folgen die Axiome (1)-(5) durch direktes Ausrechnen<sup>3</sup>:

(1) Für  $f \in \text{Fun}(\mathcal{G})$  gilt per definitionem

$$\begin{aligned} [fV, W] &= \nabla_{fV}W - \nabla_W(fV) = f\nabla_VW - f\nabla_WV - V\nabla_Wf = f[V, W] - V\nabla_Wf, \\ [X, fV] &= \nabla_X(fV) - \nabla_{fV}X = f[X, V] + V\nabla_Xf. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Da weiterhin  $\langle fV, W \rangle = f\langle V, W \rangle$  gilt, die Metrik also  $\text{Fun}(\mathcal{G})$ -linear ist, liefert die Koszul-Gleichung  $\langle D_{fV}W, X \rangle = f\langle D_VW, X \rangle$ , was Axiom (1) begründet.

(2) Ist offensichtlich.

(3) Mit der Koszul-Gleichung gilt wegen (1), der  $\text{Fun}(\mathcal{G})$ -Linearität des inneren Produktes, und den Beziehungen (1.20)

$$\langle D_V(fW), X \rangle = f\langle D_VW, X \rangle + (\nabla_Vf)\langle W, X \rangle, \quad (1.21)$$

wie sich durch direkte Rechnung bestätigen läßt. Da dies für alle  $X \in \text{Vek}(\mathcal{G})$  gilt und das innere Produkt nicht entartet ist, folgt hieraus Axiom (3).

(4) Wir notieren die Koszul-Gleichung wie folgt:  $2\langle D_VW, X \rangle = F(V, W, X)$ . Dann ist  $2\langle D_VW - D_WV, X \rangle = F(V, W, X) - F(W, V, X)$ . Direktes Ausrechnen der rechten Seite dieser Gleichung liefert als Ergebnis  $\langle X, [V, W] \rangle - \langle X, [W, V] \rangle = 2\langle X, [V, W] \rangle$ , da die Klammer schiefssymmetrisch ist. Also gilt  $\langle D_VW - D_WV, X \rangle = \langle X, [V, W] \rangle$  für alle  $X \in \text{Vek}(\mathcal{G})$ . Hieraus folgt das Axiom (4), weil das innere Produkt nicht entartet ist.

(5) Mit der Bezeichnung aus (4) für die rechte Seite der Koszul-Gleichung gilt wegen selbiger  $2\langle D_XV, W \rangle + 2\langle D_XW, V \rangle = F(X, V, W) + F(X, W, V)$ . Direktes Ausrechnen der rechten Seite ergibt  $2\nabla_X\langle V, W \rangle$ , woraus das Axiom (5) folgt. ■

**Konzept 1.2.8 — Christoffel-Symbole.** Sei  $\zeta = (x^1, x^2, x^3)$  ein Koordinatensystem mit Basis  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}(3)}$  auf der Domäne  $\text{dom}\zeta$  in einer Galilei-Raumzeit. Die reellwertigen Funktionen  $\Gamma_{bc}^a$  ( $a, b, c \in \mathcal{I}(3)$ ) auf  $\text{dom}\zeta$ , definiert durch

$$D_{e_a}e_b = \Gamma_{ab}^c e_c, \quad (1.22)$$

heißen **Christoffel-Symbole** des Koordinatensystems  $\zeta$ .

Leider wird in der Literatur häufig die irreführende Notation  $D_a$  für  $D_{e_a}$  verwendet. Das ist unglücklich, weil der fälschliche Eindruck vermittelt wird, daß es sich bei  $D_a$  um die Komponente eines Differentialoperators handelt. Bei  $e_a$  handelt es sich ja auch nicht um

<sup>3</sup>Wir vermeiden hier absichtlich, die Richtungsableitung zum Rechnen zu verwenden, außer wenn Definitionen dies erfordern.



die  $a$ -Komponente eines Vektors  $e$ , sondern um den Einheitsvektor  $e_a$ . Wegen  $[e_a, e_b] = D_{e_a}e_b - D_{e_b}e_a = 0$  gilt  $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$ .

**Aussage 1.2.2** Sei  $\zeta = (x^1, x^2, x^3)$  ein Koordinatensystem mit Basis  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{J}(3)}$  auf  $\text{dom} \zeta \subset \mathcal{G}$  in einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Für Vektorfelder  $V, W$  auf  $\text{dom} \zeta$  mit  $V = V^a e_a$  und  $W = W^b e_b$  relativ zu  $\zeta$  gilt

$$(a) \quad D_V W = \langle V, \text{grad } W^b \rangle e_b + V^a W^b \Gamma_{ab}^c e_c, \quad (1.23)$$

wobei die Christoffel-Symbole wie folgt gegeben sind:

$$(b) \quad \Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}). \quad (1.24)$$

### Begründung:

(a) Die Verwendung der Axiome (1) und (3) liefert

$$D_V W = D_{V^a e_a} (W^b e_b) = \langle V, \text{grad } W^b \rangle e_b + V^a W^b D_{e_a} e_b. \quad (1.25)$$

Die Aussage folgt hieraus mit der Definition der Christoffel-Symbole.

(b) Folgt aus der Koszul-Gleichung für  $2 \langle D_{e_a} e_b, e_c \rangle$ . Beachten Sie, daß  $[e_a, e_b] = 0$  für alle  $a, b \in \mathcal{J}(3)$ . Einsetzen liefert

$$2 \langle D_{e_a} e_b, e_c \rangle = \langle e_a, \text{grad } g_{bc} \rangle + \langle e_b, \text{grad } g_{ac} \rangle - \langle e_c, \text{grad } g_{ab} \rangle. \quad (1.26)$$

Nun ist  $\langle e_a, \text{grad } f \rangle = \partial_a f$  für alle  $a \in \mathcal{J}(3)$  und  $f \in \text{Fun}(\mathcal{G})$ . Für die linke Seite der Gleichung (1.26) gilt mit der Definition der Christoffel-Symbole  $2 \langle D_{e_a} e_b, e_c \rangle = 2 \Gamma_{ab}^d \langle e_d, e_c \rangle \equiv 2 \Gamma_{ab}^d g_{dc}$ , woraus die Aussage folgt. ■

Endlich kommen wir zum

**Konzept 1.2.9 — Beschleunigungsvektor.** Sei  $\gamma: \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  eine Kurve in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  und  $V \in \text{Vek}(\gamma)$  das zugehörige Geschwindigkeitsvektorfeld. Der Beschleunigungsvektor von  $\gamma$  zu  $t \in \mathcal{I}$  (oder am Punkt  $\gamma(t)$  der Kurve) ist

$$\ddot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \left. \frac{d}{du} V(\gamma(u)) \right|_t. \quad (1.27)$$

Beachten Sie, daß  $\ddot{\gamma} = D_V V$  entlang der Kurve. Für die Beschleunigung am Punkt  $\gamma(t)$  der Kurve  $\gamma$  sind auch folgende Notationen üblich:  $\ddot{\gamma}(\gamma(t))$  oder  $\ddot{\gamma}_{\gamma(t)}$ .

**Aussage 1.2.3 — Beschleunigung dargestellt in Koordinaten.** Sei  $x^1, x^2, x^3$  ein räumliches Koordinatensystem in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R} \times \mathbb{E}, +)$  mit Domäne  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ . Der Beschleunigungsvektor einer Kurve  $\gamma$  in  $\mathcal{G}$  hat am Punkt  $\gamma(t) \in \mathcal{U}$  relativ zu den gewählten Koordinaten die Darstellung

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(\gamma(t)) &= \sum_{a \in \mathcal{J}(3)} \ddot{x}^a(\gamma(t)) e_a(\gamma(t)) + \\ &+ \sum_{a \in \mathcal{J}(3)} \dot{x}^a(\gamma(t)) \sum_{b, c \in \mathcal{J}(3)} \dot{x}^b(\gamma(t)) \Gamma_{ab}^c(\gamma(t)) e_c(\gamma(t)). \end{aligned} \quad (1.28)$$

**Begründung:** In dem gewählten Koordinatensystem gilt für den Geschwindigkeitsvektor

$V$  entlang der Kurve  $\gamma$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= D_V V = D_{V^a e_a} (V^b e_b) \stackrel{(1)}{=} V^a D_{e_a} (V^b e_b) \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} \langle V, \text{grad } V^b \rangle e_b + V^a V^b D_{e_a} e_b, \end{aligned} \quad (1.29)$$

wobei (1) die Fun( $\mathcal{G}$ )-Linearität des Levi-Civita Zusammenhangs bedeutet und (3) die Leibniz-Regel, außerdem haben wir die Summenkonvention benutzt. Wegen der Kettenregel ist  $\langle V, \text{grad } V^b \rangle = \dot{V}^b$ , also die Ableitung der Geschwindigkeitskomponente  $V^b \in \text{Fun}(\mathcal{G})$  nach dem Kurvenparameter. Beachten wir schließlich die Definition der Christoffel-Symbole für das verwendete Koordinatensystem, so folgt die Behauptung. ■

**Aussage 1.2.4** In einer Galilei-Raumzeit gibt es beschleunigungsfreie Kurven.

**Begründung:** Für eine beschleunigungsfreie Kurve  $\gamma: \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  in einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  gilt  $D_V V = 0$  zu jedem Zeitpunkt (falls wir den Kurvenparameter so nennen), wobei  $V$  die Geschwindigkeit entlang der Kurve bezeichne. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem. Die Christoffel-Symbole eines kartesischen Koordinatensystems verschwinden, und eine beschleunigungsfreie Kurve gehorcht in diesem Koordinatensystem der Gleichung  $\dot{V}^a = 0$  ( $a \in \mathcal{I}(3)$ ). Also sind beschleunigungsfreie Kurven in einer Galilei-Raumzeit die Geraden  $\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\dot{\gamma}(t_0)$  mit Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t_0$ . Diese Aussage ist offenbar unabhängig vom gewählten Koordinatensystem. ■

Beschleunigungsfreie Kurven charakterisieren die Geometrie einer Raumzeit:

**Konzept 1.2.10 — Geodätengleichung.** Sei  $D$  der Levi-Civita Zusammenhang auf einer Raumzeit. Beschleunigungsfreie Kurven  $\gamma$  in dieser Raumzeit erfüllen die sogenannte **Geodätengleichung**:

$$D_{\dot{\gamma}}(D_{\dot{\gamma}} \gamma) = 0, \quad (1.30)$$

zusammen mit den üblichen Anfangsbedingungen, und heißen **Geodäten**.

Das gilt ganz allgemein für jede Raumzeit und insbesondere für die von uns gewählte Galilei-Raumzeit. Beschleunigungsfreie Kurven oder Geodäten in der Galilei-Raumzeit sind also Geraden.

Weil Geodäten bemerkenswerte Kurven sind, wollen wir diese sogleich in alternativer Weise charakterisieren.

**Konzept 1.2.11 — Bogenlänge.** Sei  $\gamma: [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  ein glatter Kurvenabschnitt in einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Die **Bogenlänge** von  $\gamma$  ist

$$\ell[\gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[t_1, t_2]} dt \|\dot{\gamma}_{\gamma(t)}\|. \quad (1.31)$$

Die Notation mit der eckigen Klammer um das Argument der Bogenlänge dient dazu, diese als Funktional auszuweisen. Dies braucht sie im Moment noch nicht weiter zu interessieren. Wir insistieren auf diese Notation lediglich, weil die Bogenlänge von einer Kurve und nicht einfach von einer Zahl abhängt. Da  $\|\dot{\gamma}_{\gamma(t)}\| = \langle \dot{\gamma}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}_{\gamma(t)} \rangle^{1/2}$ , gilt in Koordinaten

**Konzept 1.2.12 — Bogenlänge in Koordinaten.** Sei  $\gamma: [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  ein glatter Kurvenabschnitt in einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  und  $x^1, x^2, x^3$  ein Koordinatensystem mit Domäne  $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$  so, daß  $\gamma([t_1, t_2]) \subset \mathcal{U}$ . Die Bogenlänge von  $\gamma$  relativ zu diesem Koordinatensystem ist

$$\ell[\gamma] = \int_{[t_1, t_2]} dt \sqrt{\sum_{a,b \in \mathcal{I}(3)} g_{ab} \frac{dx^a \circ \gamma}{dt} \frac{dx^b \circ \gamma}{dt}}. \quad (1.32)$$

Kurven, die nahe beinander verlaufen, können miteinander verglichen werden. Der Vergleich bedarf einiger Vorarbeit.

**Konzept 1.2.13 — Zwei-Parameter Abbildung.** Sei  $\mathcal{D} = \mathcal{I}_t \times \mathcal{I}_v$  eine offene Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die die folgende Intervall-Bedingung erfüllt: Falls horizontale oder vertikale Linien durch  $\mathcal{D}$  verlaufen, so sind die entsprechenden Durchschnitte echte Intervalle. Eine **zwei-Parameter Abbildung** ist eine glatte Abbildung  $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{G}$  in die Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ .

Wir können uns eine solche Abbildung  $\alpha$  als zwei miteinander verwobene Familie von ein-Parameter Kurven vorstellen:

- 1.) Die  $t$ -Parameterkurve  $v = v_0$  ist die Abbildung  $\alpha_{v_0}: \mathcal{I}_t \rightarrow \mathcal{G}$ , definiert durch  $\alpha_{v_0}(t) := \alpha(t, v_0)$
- 2.) Die  $v$ -Parameterkurve  $t = t_0$  ist die Abbildung  $\alpha_{t_0}: \mathcal{I}_v \rightarrow \mathcal{G}$ , definiert durch  $\alpha_{t_0}(v) := \alpha(t_0, v)$ .

Die **partiellen Geschwindigkeiten**  $\dot{\alpha} := \partial_t \alpha$  und  $\alpha' := \partial_v \alpha$  sind Vektorfelder auf  $\alpha$ . Wir vereinbaren sogleich (und haben dies gerade genutzt), daß wir diese Vektorfelder ohne Kurvenpunkt notieren, an dem die entsprechenden Tangentenvektoren ankern. Offenbar ist  $\dot{\alpha}(t_0, v_0)$  der Geschwindigkeitsvektor bei  $t_0$  der  $t$ -Parameterkurve  $v = v_0$ , und entsprechendes kann über  $\alpha'(t_0, v_0)$  notiert werden.

Liegt  $\alpha$  in der Domäne eines Koordinatensystems  $\zeta = (x^1, x^2, x^3)$  mit Basis  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}(3)}$ , dann ist die Darstellung von  $\alpha$  relativ zu  $\zeta$  durch die reellen Funktionen  $\alpha^a: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha^a := x^a \circ \alpha$  für  $a \in \mathcal{I}(3)$  gegeben, und

$$\dot{\alpha} = \sum_{a \in \mathcal{I}(3)} (\partial_t \alpha^a) e_a, \quad \alpha' = \sum_{a \in \mathcal{I}(3)} (\partial_v \alpha^a) e_a. \quad (1.33)$$

Sei  $Z$  ein glattes Vektorfeld auf  $\alpha$ . Dann heißt

- 1.)  $D_{\dot{\alpha}}Z$  die kovariante Ableitung von  $Z$  entlang der  $t$ -Parameterkurven, und
- 2.)  $D_{\alpha'}Z$  die kovariante Ableitung von  $Z$  entlang der  $v$ -Parameterkurven.

Mit anderen Worten,  $D_{\dot{\alpha}}Z(t_0, v_0)$  ist die kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $t \rightarrow Z(t, v_0)$  auf der Kurve  $t \rightarrow \alpha(t, v_0)$  bei  $t_0$ .

In der oben angegebenen Koordinatenumgebung ist  $Z = Z^a e_a$ , wobei  $Z^a = Z(\alpha^a)$  für jedes  $a \in \mathcal{I}(3)$  eine reelle Funktion auf  $\mathcal{D}$  ist. Mit (1.23) folgt

$$D_{\dot{\alpha}}Z = \sum_{a \in \mathcal{I}(3)} \left( \frac{\partial Z^a}{\partial t} + \sum_{b,c \in \mathcal{I}(3)} \Gamma_{bc}^a Z^b \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \right) e_a. \quad (1.34)$$

Ein wichtiger Spezialfall ist  $Z = \dot{\alpha}$ , denn  $D_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$  ist die Beschleunigung der  $t$ -Parameterkurven, und entsprechendes gilt für die Beschleunigung der  $v$ -Parameterkurven.

**Konzept 1.2.14 — Variation eines Kurvenabschnitts.** Unter der **Variation eines Kurvenabschnitts**  $\gamma : [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  verstehen wir eine zwei-Parameter Abbildung

$$\alpha : [t_1, t_2] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{G}, \quad (0 < \delta \in \mathbb{R}), \quad (1.35)$$

so, daß  $\gamma(t) = \alpha(t, 0)$  für alle  $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ .

Die Kurven  $\alpha_v : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{G}$  mit  $v \in (-\delta, \delta)$  heißen **längslaufend**, und die Kurven  $\alpha_t : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{G}$  mit  $t \in [t_1, t_2]$  heißen **querlaufend**. Der Kurvenabschnitt  $\gamma$  heißt die **Basiskurve** von  $\alpha$ .

Für jedes  $v \in (-\delta, \delta)$  sei  $B_\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^+$  die Länge der längslaufenden Kurve  $\alpha_v : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{G}$ , also  $B_\alpha(v) := \ell[\alpha_v]$ .  $B_\alpha$  ist eine reellwertige Funktion und  $B_\alpha(0)$  ist die Länge der Basiskurve  $\gamma$ . Wir werden  $B_\alpha$  immer als glatt annehmen. Uns interessiert das

**Konzept 1.2.15 — Erste & zweite Variation der Bogenlänge.** Sei  $\gamma : [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  eine Kurve in der Galilei-Raumzeit mit Variationen  $\alpha : [t_1, t_2] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{G}$  ( $0 < \delta \in \mathbb{R}$ ). Die **erste** und **zweite Variation der Bogenlänge nach  $\alpha$**  ist definiert als

$$B'_\alpha(0) = \left. \frac{dB_\alpha}{dv} \right|_{v=0}, \quad B''_\alpha(0) = \left. \frac{d^2B_\alpha}{dv^2} \right|_{v=0}. \quad (1.36)$$

Wir vereinbaren, Ableitungen der Variation  $\alpha$  mit Basiskurve  $\gamma$  nach dem  $t$ -Parameter mit  $\dot{\alpha}$  zu bezeichnen. Insbesondere setzen wir  $\dot{\alpha}(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$ . Beachten Sie, daß wir statt der Position auf der Kurve nur den Kurvenparameter notieren, also zum Beispiel  $\dot{\gamma}(t)$  statt  $\dot{\gamma}_{\gamma(t)}$ .

**Aussage 1.2.5** Sei  $\alpha$  Variation eines Kurvenabschnittes  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{G}$  in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Dann gilt

$$B'_\alpha(0) = \int_{[t_1, t_2]} dt \langle \dot{\gamma} / \|\dot{\gamma}\|, \dot{\alpha}' \rangle, \quad (1.37)$$

wobei  $\dot{\alpha}' = D_{\alpha'} \dot{\alpha}(t, 0)$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$  das mit der Variation assoziierte Vektorfeld genannt wird.

**Begründung:** Nach Annahme ist  $\|\dot{\alpha}\|$  nach dem  $v$ -Parameter differenzierbar. Daher gilt

$$B'_\alpha(0) = \int_{[t_1, t_2]} dt \left. \frac{d}{dv} \right|_{v=0} \|\dot{\alpha}\|. \quad (1.38)$$

Wir rechnen  $d\|\dot{\alpha}\|/dv = \langle \dot{\alpha}' / \|\dot{\alpha}\|, D_{\alpha'} \dot{\alpha} \rangle$ . An der Stelle  $v = 0$  finden wir  $\dot{\alpha}(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$ , und nach Definition  $D_{\alpha'} \dot{\alpha} = \dot{\alpha}'$ , woraus die Aussage folgt. ■

**Aussage 1.2.6 — Erste Variationsgleichung.** Sei  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{G}$  ein glatter Kurven-

abschnitt in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  mit Variationen  $\alpha$ . Dann gilt

$$B'_\alpha(0) = - \int_{[t_1, t_2]} dt \langle (\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|)^\cdot, \alpha' \rangle + \langle \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|, \alpha' \rangle \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.39)$$

**Begründung:** In Gleichung (1.37) integrieren wir partiell. Wegen

$$\langle \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|, \alpha' \rangle = (d/dt) \langle \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|, \alpha' \rangle - \langle (\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|)^\cdot, \alpha' \rangle, \quad (1.40)$$

folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Aussage.  $\blacksquare$

Wir interessieren uns in der Mechanik hauptsächlich für Variationen mit  $\alpha(t_1, v) = \gamma(t_1)$ ,  $\alpha(t_2, v) = \gamma(t_2)$  für alle  $v \in (-\delta, \delta)$ , was bedeutet, daß die Endpunkte aller Variationen festgehalten werden und mit den Enden der Basiskurve  $\gamma$  übereinstimmen. Folglich verschwindet  $\alpha'$  an den Endpunkten und damit auch der zweite Term in (1.39). Wir vereinbaren, ausschließlich solche Variationen zu betrachten.

Gilt  $B'_\alpha(0) = 0$ , so ist die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums erfüllt. Mit anderen Worten, für eine Basiskurve mit extremaler Bogenlänge muß notwendigerweise  $B'_\alpha(0) = 0$  gelten.

**Aussage 1.2.7** Ein glatter Kurvenabschnitt  $\gamma$  ist genau dann eine Geodäte, wenn die erste Variation der Bogenlänge verschwindet für alle Variationen von  $\gamma$  mit festgehaltenen Endpunkten.

**Begründung:**

$\curvearrowright$ : Sei  $\gamma$  eine Geodäte. Dann gilt mit  $V = \dot{\gamma}$  nach Definition  $\dot{V} = 0$ , und damit wegen der festgehaltenen Endpunkte  $B'_\alpha(0) = 0$ , was unmittelbar aus  $(V/\|V\|)^\cdot = \dot{V}/\|V\| - \langle \dot{V}/\|V\|, V/\|V\| \rangle V$  folgt.

$\curvearrowleft$ : Es gelte nun umgekehrt  $B'_\alpha(0) = 0$  für jede Variation  $\alpha$  mit festgehaltenen Endpunkten. Sei  $y$  ein beliebiger Tangentenvektor am Punkt  $\gamma(t)$ . Insbesondere braucht es sich nicht um den Geschwindigkeitsvektor an diesem Punkt des Kurvenabschnitts zu handeln. Sei weiterhin  $f$  eine Testfunktion auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$ , das bedeutet,  $f$  ist glatt und besitzt einen kompakten Träger, sagen wir  $\text{Supp } f \subset [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subset [t_1, t_2]$  für  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ . Wir bezeichnen mit  $Y$  das Vektorfeld auf  $\gamma$ , welches durch Parallelverschiebung von  $y$  entlang  $\gamma$  erzeugt wird. Schließlich setzen wir  $X = fY$ .

Mit  $\alpha' = X_{\gamma(t)}$  charakterisieren wir die Variationen von  $\gamma$  mit festgehaltenen Endpunkten, deren assoziiertes Vektorfeld gerade  $X$  ist. Gleichung (1.39) liefert dann wegen  $B'_\alpha(0) = 0$ ,

$$0 = \int_{[t_1, t_2]} dt \langle (\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|)^\cdot, \alpha' \rangle = \int_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]} dt \langle (\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|)^\cdot, fY \rangle. \quad (1.41)$$

Dies gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , für alle Tangentenvektoren  $y$  und Testfunktionen  $f$ . Daher folgt  $\langle (\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|)^\cdot, y \rangle = 0$  für alle  $y$ . Weil das innere Produkt nicht entartet ist, folgt weiter  $(\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|)^\cdot = 0$ , oder mit den Bezeichnungen wie im  $\curvearrowright$ -Teil der Begründung:  $\dot{V} = \langle \dot{V}, V/\|V\| \rangle V$ . Diese Gleichung impliziert entweder  $\dot{V} \propto V$  und damit  $\|V\| = 1$ , was nicht vorausgesetzt wurde, oder  $\dot{V} = 0$ . Letzteres ist die Geodätengleichung.

Damit sind beide Richtungen der Aussage gezeigt. ■

Wir wollen die Bogenlänge  $B_\alpha(v)$  einer Variation  $\alpha$  für hinreichend kleine  $v$  mit der Bogenlänge  $B_\alpha(0)$  der Basiskurve  $\gamma$  zu vergleichen. Die zweite Variation der Bogenlänge nach  $\alpha$  wird relevant, wenn die erste Variation verschwindet. Wir haben gerade gezeigt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn die Basiskurve eine Geodäte ist.

Das Vektorfeld  $\alpha'(t)$  gibt die Geschwindigkeiten der querlaufenden Kurven von  $\alpha$ , wenn diese die Basiskurve  $\gamma$  kreuzen. Ähnlich ist  $\alpha''(t) = D_{\alpha'}\alpha'(t, 0)$  deren Beschleunigung.

Jedes Vektorfeld  $Y$  auf  $\gamma$  kann folgendermaßen aufgespalten werden:  $Y = \tan Y + \text{nor } Y$ , wobei  $\tan Y$  tangential an  $\gamma$  liegt, und  $\text{nor } Y$  senkrecht dazu.

**Aussage 1.2.8 — Zweite Variationsgleichung.** Sei  $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{G}$  ein geodätischer Kurvenabschnitt mit konstanter Geschwindigkeit  $c := \|\dot{\sigma}\|(t, 0) = \text{const.}$  in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Für jede Variation  $\alpha$  mit Basiskurve  $\sigma$  gilt

$$B''_\alpha(0) = c^{-1} \int_{[t_1, t_2]} dt \left\| \text{nor } D_{\dot{\alpha}}\alpha' \right\|^2 + c^{-1} \left\langle \dot{\sigma}, \alpha'' \right\rangle \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.42)$$

**Begründung:** Sei  $h(t, v) := \|\dot{\alpha}(t, v)\|$ . Mit dieser Bezeichnung ist die zweite Variation der Bogenlänge nach  $\alpha$

$$B''_\alpha(0) = \int_{[t_1, t_2]} dt \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(t, 0). \quad (1.43)$$

Für den Beweis von Aussage 1.2.5 berechneten wir  $\partial h / \partial v = h^{-1} \langle \dot{\alpha}, D_{\alpha'}\dot{\alpha} \rangle$ . Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} \langle \dot{\alpha}, D_{\alpha'}\dot{\alpha} \rangle + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial v} \langle \dot{\alpha}, D_{\alpha'}\dot{\alpha} \rangle \\ &= -\frac{1}{h^3} \langle \dot{\alpha}, D_{\alpha'}\dot{\alpha} \rangle^2 + \frac{1}{h} \|D_{\alpha'}\dot{\alpha}\|^2 + \frac{1}{h} \langle \dot{\alpha}, D_{\alpha'}D_{\alpha'}\dot{\alpha} \rangle. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Da auf einer Galilei-Raumzeit  $D_{\alpha'}\dot{\alpha} = D_{\dot{\alpha}}\alpha'$  und  $D_{\alpha'}D_{\alpha'}\dot{\alpha} = D_{\dot{\alpha}}D_{\alpha'}\alpha'$ , folgt

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = -\frac{1}{h^3} \langle \dot{\alpha}, D_{\dot{\alpha}}\alpha' \rangle^2 + \frac{1}{h} \|D_{\dot{\alpha}}\alpha'\|^2 + \frac{1}{h} \langle \dot{\alpha}, D_{\dot{\alpha}}D_{\alpha'}\alpha' \rangle. \quad (1.45)$$

An der Stelle  $v = 0$  werden folgende Ersetzungen in obiger Gleichung gemacht:  $h \rightarrow c$ ,  $\dot{\alpha} \rightarrow \dot{\sigma}$ , und  $D_{\alpha'}\alpha' \rightarrow \alpha''$ . Somit

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = -c^{-3} \langle \dot{\sigma}, D_{\dot{\alpha}}\alpha' \rangle^2 + c^{-1} \|D_{\dot{\alpha}}\alpha'\|^2 + c^{-1} \langle \dot{\sigma}, D_{\dot{\alpha}}\alpha'' \rangle. \quad (1.46)$$

Da nach Voraussetzung  $\sigma$  eine Geodäte ist, gilt  $\langle \dot{\sigma}, D_{\dot{\alpha}}\alpha'' \rangle = (d/dt) \langle \dot{\sigma}, \alpha'' \rangle$ . Weil  $\dot{\sigma}/c$  ein Feld von Einheitsvektoren ist, gilt  $\tan D_{\dot{\alpha}}\alpha' = \langle D_{\dot{\alpha}}\alpha', \dot{\sigma}/c \rangle \dot{\sigma}/c$ . Also,

$$D_{\dot{\alpha}}\alpha' = c^{-2} \langle D_{\dot{\alpha}}\alpha', \dot{\sigma} \rangle \dot{\sigma} + \text{nor } D_{\dot{\alpha}}\alpha', \quad (1.47)$$

und weiter

$$c^{-1} \|D_{\dot{\alpha}}\alpha'\|^2 = c^{-3} \langle D_{\dot{\alpha}}\alpha', \dot{\sigma} \rangle^2 + c^{-1} \|\text{nor } D_{\dot{\alpha}}\alpha'\|^2. \quad (1.48)$$

Einsetzen ergibt nach Wegheben der Terme  $\propto c^{-3}$  als Ergebnis

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = c^{-1} \left\| \text{nor } D_{\dot{\alpha}} \alpha' \right\|^2 + \frac{d}{dt} \langle \dot{\sigma}, \alpha'' \rangle . \quad (1.49)$$

Integration über das Intervall  $[t_1, t_2]$  ergibt die Aussage. ■

Der Ausdruck

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \langle \dot{\sigma}, \alpha'' \rangle \right|_{t_1}^{t_2} = \langle \dot{\sigma}(t_2), \alpha''(t_2) \rangle - \langle \dot{\sigma}(t_1), \alpha''(t_1) \rangle \quad (1.50)$$

mißt den Beitrag der Konvexität/Konkavität der ersten und letzten querlaufenden Kurven von  $\alpha$  zur zweiten Variation der Bogenlänge nach  $\alpha$ . Da wir vereinbart haben, die Endpunkte aller Variationen festzuhalten, verschwindet dieser Beitrag:  $\mathcal{E} = 0$ . Somit ist

$$B''_{\alpha}(0) = c^{-1} \int_{[t_1, t_2]} dt \left\| \text{nor } D_{\dot{\alpha}} \alpha' \right\|^2 > 0 . \quad (1.51)$$

Damit haben endlich eine alternative Charakterisierung von Geodäten gefunden.

**Aussage 1.2.9** Geodätische Kurvenabschnitte  $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{G}$  in einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  haben von allen glatten Kurven mit Anfangspunkt  $\sigma(t_1)$  und Endpunkt  $\sigma(t_2)$  die minimale Bogenlänge.

**Begründung:** Nach Aussage 1.2.7 verschwindet die erste Variation der Bogenlänge genau dann, wenn die Basiskurve der Variation eine Geodäte ist. Nach der eben begründeten zweiten Variationsgleichung ist dann die zweite Variation der Bogenlänge stets positiv. Damit ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür erfüllt, daß Geodäten die Bogenlänge minimieren. ■

**Beobachter** in einer Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R} \times \mathbb{E}, +)$  sind Punktmassen auf Kurven  $\gamma : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ . Beachten Sie den Sprachgebrauch: Eigentlich handelt es sich hier um Kurven in  $\mathbb{E}$ . Beobachter auf Geodäten haben die einfachst mögliche Naturbeschreibung, wie wir alsbald einsehen werden. Obwohl Beobachter punktförmig idealisiert werden, denken wir sie uns mit einem Labor ausgestattet, welches Apparaturen zur Beobachtung und Messung von Ereignissen einschließt, insbesondere auch über Maßstäbe zur Längenmessung verfügt, und über ein Uhrkonzept, welches letztendlich den Parameter Zeit physikalisch realisiert.

Allen Beobachter gemein ist, daß sie Koordinaten wählen, um Ereignisse in der Galilei-Raumzeit zu beschreiben.

**Konzept 1.2.16 — Koordinaten-Position.** Sei  $\zeta = (x^1, x^2, x^3)$  ein räumliches Koordinatensystem in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ . Für jedes Ereignis  $p$  in  $\mathcal{G}$  heißt  $\zeta(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p)) \in \mathbb{E}$  die  **$\zeta$ -Position** des Ereignisses  $p$ .

In einer Galilei-Raumzeit können Beobachter ihr Labor mit Koordinaten ausstatten, deren Domäne den gesamten Raum  $\mathbb{E}$  einschließt. Geodätischen Beobachtern steht darüber hinaus folgendes zu Verfügung:

**Konzept 1.2.17 — Inertialsystem.** Ein **Inertialsystem** ist ein Koordinatensystem in der Galilei-Raumzeit, welches sich folgendermaßen charakterisieren läßt: Von einem beliebigen Punkt aus werden sukzessive in beliebig großen Zeitabständen drei Punktmassen nach linear unabhängigen Richtungen fortgeschleudert und anschließen sich selbst überlassen. In einem **Inertialsystem** bewegen sich diese dann freien Punktmassen geradlinig.

Die Qualifikation frei bezieht sich hier auf den asymptotischen Zustand (also nach beliebig langer Zeit) der Punktmassen: Jede Punktmasse bewegt sich in beliebig guter Näherung so, als ob sie die einzige Punktmasse in der Raumzeit wäre. Ist ein Inertialsystem einmal etabliert, so gilt:

**Aussage 1.2.10** Sei  $\zeta = (x^1, x^2, x^3)$  ein Inertialsystem in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$  mit globaler Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Dann gilt global

$$\langle e_a, e_b \rangle = \delta_{ab}, \quad \partial_c \langle e_a, e_b \rangle = 0, \quad a, b, c \in \mathcal{I}(3). \quad (1.52)$$

**Begründung:** Ergibt sich aus der semantischen Charakterisierung des Inertialsystems. ■

Beachten Sie, daß es sich hierbei um globale Aussagen handelt, weil die Basis eine globale ist. In der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein ist es möglich, diese Bedingungen, relativistisch adaptiert, wenigstens noch lokal zu fordern und so das Konzept eines lokalen Inertialsystems zu erlauben. Die zweite Forderung bedeutet, daß alle Christoffel-Symbole verschwinden. Für geodätische Beobachter in einem Inertialsystem sind beschleunigungsfreie Kurven also offensichtlich Geraden in der Galilei-Raumzeit. In anderen Koordinatensystemen mit lokalen Basisvektoren werden in der Geodäten-Gleichung die durch Christoffel-Symbole bedingten Terme manchmal als Scheinbeschleunigungen bezeichnet. Das liegt an einer ungünstigen Sichtweise, die mit Komponenten von Vektoren statt mit Vektoren arbeitet.

**Aussage 1.2.11 — Trägheitssatz von Galilei.** In einem Inertialsystem bewegt sich eine freie Punktmasse geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit.

Die Qualifikation frei meint hier wieder, daß die Punktmasse beliebig weit entfernt von allen anderen Punktmassen ist. Später werden wir dies in beliebig guter Näherung durch kräftefrei ersetzen.

**Prinzip 1.2.1 — Spezielles Relativitätsprinzip von Galilei.** Die grundlegenden physikalischen Gesetze der Klassischen Mechanik sind für abgeschlossenen Systeme identisch in allen Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen.

Ein abgeschlossenes System meint hierbei ein Konfiguration von Punktmassen, die als vollkommen isoliert von allen anderen eventuell existierenden Punktmassen in der Galilei-Raumzeit angesehen werden darf.

### 1.2.1 Relativität von Geschwindigkeit

Offenbar gibt es eine beliebig große Anzahl von Inertialsystemen, denn geodätische Beobachter können beliebige gleichförmige (das heißt konstante) Relativgeschwindigkeiten



zueinander haben. Das spezielle Relativitätsprinzip von Galilei besagt, daß alle solche geodätischen Beobachter gleichberechtigt sind. Dies wollen wir nun etwas genauer analysieren. Je zwei Inertialsysteme ausgestattet mit denselben Orthonormalbasen und anfänglich zusammenfallenden Ursprüngen lassen sich vergleichen, da ja ihre kartesischen Koordinaten auf den Fasern  $\mathbb{E}_t$  in der Beziehung  $q' = tv$  stehen, mit konstanten Verschiebungsvektor  $v \in \mathbb{E}$ . Daher bedeutet das spezielle Relativitätsprinzip in dieser Situation folgendes:

**Prinzip 1.2.2 — Spezielle Galilei-Transformationen.** Sei  $\mathcal{G} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R} \times \mathbb{E}, +)$  eine Galilei-Raumzeit. Die **speziellen Galilei-Transformationen**

$$G_v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad G_v(t, q) \stackrel{\text{def}}{=} (t, q + vt), \quad v \in \mathbb{E} \quad (1.53)$$

lassen die Gesetze der Klassischen Mechanik invariant und sind daher Symmetrien aller physikalischer Systeme in der Domäne der Klassischen Mechanik.

Dem Symmetriebegriff liegt also eine Invarianz zugrunde. Diese Invarianzforderung bedingt die von uns verwendete mathematische Sprache, um mechanische Gesetzmäßigkeiten und mechanische Phänomene zu formulieren, wie wir weiter unten in einem eigenen Abschnitt sehen werden. Offenbar bilden die speziellen Galilei-Transformationen eine Gruppe bestehend aus einer Menge  $\{G_v\}_{v \in \mathbb{E}}$  und obiger Operation, die jedem geordneten Paar  $(G_v, G_w)$  von Elementen aus  $\{G_v\}_{v \in \mathbb{E}}$  ein mit  $G_v \circ G_w$  (Komposition) bezeichnetes Element aus  $\{G_v\}_{v \in \mathbb{E}}$  so zuordnet, daß folgende Axiome erfüllt sind: Es gilt das kompositorische Assoziativgesetz, als neutrales Element fungiert  $G_{0_{\mathbb{E}}}$ , und zu jedem  $G_v \in \{G_v\}_{v \in \mathbb{E}}$  gibt es ein mit  $G_{-v}$  bezeichnetes inverses Element mit  $G_{-v} \circ G_v = G_{0_{\mathbb{E}}}$ . Die Gruppe der speziellen Galilei-Transformationen ist außerdem eine abelsche oder kommutative Gruppe, denn  $G_v \circ G_w = G_w \circ G_v$  für alle  $v, w \in \mathbb{E}$ . Galilei-Transformationen sind eine Symmetriegruppe der Klassischen Mechanik in der Galilei-Raumzeit. Insbesondere überführt diese Symmetriegruppe Inertialsysteme in Inertialsysteme. Die Literatur bezeichnet den Zusammenhang zwischen Inertialsystemen und speziellen Galilei-Transformationen abkürzend als Relativität der Geschwindigkeiten, denn wir können uns kein Experiment in der Domäne der Klassischen Mechanik überlegen, welches es erlaubte, Inertialsystemen eine absolute Geschwindigkeit zuzuordnen. So können wir das spezielle Relativitätsprinzip von Galilei auch verstehen und Sie sind hiermit ermutigt, diesen Sachverhalt wohl zu durchdenken.

## 1.2.2 Relativität der Richtung

Neben der Relativität der Geschwindigkeit sind auch Richtungen im Raum lediglich relative Konzepte. Der zu dieser Relativität gehörende Symmetriebegriff heißt Isotropie des Raumes. Die zugehörige Symmetriegruppe besteht aus Abbildungen, die das innere Produkt von euklidischen Räumen invariant lassen. Daher sind sie von großem Interesse.

**Konzept 1.2.18 — Orthogonale Abbildungen.** Es sei  $\mathbb{E}$  ein euklidischer Raum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  heißt eine **orthogonale** Abbildung, wenn für je zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{E}$  gilt:  $\langle \varphi v, \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle$ .

Derartige Abbildungen können noch auf verschiedene andere Weisen gleichwertig charakterisiert werden.

**Aussage 1.2.12** Folgende Aussagen sind paarweise gleichwertig:

- (1)  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist eine orthogonale Abbildung.
- (2) Für alle  $v \in \mathbb{E}$  mit  $\|v\| = 1$  gilt stets  $\|\varphi v\| = 1$ .
- (3) Für alle  $v \in \mathbb{E}$  gilt  $\|v\| = \|\varphi v\|$ .
- (4) Ist  $\{e_1, e_2, e_3\}$  eine orthonormale Basis von  $\mathbb{E}$ , so ist  $\{\varphi e_1, \varphi e_2, \varphi e_3\}$  ebenfalls eine Basis von  $\mathbb{E}$ .

Die Begründung der paarweise äquivalenten Charakterisierungen ist recht elementar, aber wir notieren sie trotzdem hier aus Gründen der bequemen Selbstkonsistenz.

**Begründung:**

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) :

Sei  $v \in \mathbb{E} : \|v\| = 1$ . Wegen der Definition der euklidischen Norm gilt dann auch  $\langle v, v \rangle = 1$ . Da nach Voraussetzung  $\varphi$  eine orthogonale Abbildung ist, folgt  $\langle \varphi v, \varphi v \rangle = \langle v, v \rangle = 1$ . Die Aussage folgt nach Wurzelziehen.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) :

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $v \neq 0_{\mathbb{E}}$  annehmen, da  $\varphi$  eine lineare Abbildung ist. Sei also  $v \in \mathbb{E} : \|v\| = c > 0$ . Dann ist  $w = v/c \in \mathbb{E}$  ein Vektor mit  $\|w\| = 1$ . Mit (2) gilt für diesen Vektor  $\|\varphi w\| = 1$ . Weil die Norm positiv homogen und  $\varphi$  eine lineare Abbildung ist, folgt  $\|\varphi v\| = c$ , also  $\|v\| = \|\varphi v\|$ .

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) :

Sei  $\{e_1, e_2, e_3\}$  eine orthonormale Basis von  $\mathbb{E}$ . Wegen (3) ist  $\|\varphi e_a\| = 1$  für alle  $a \in \mathcal{I}(3)$ . Für  $a, b \in \mathcal{I}(3) : a \neq b$  gilt einerseits  $\|\varphi(e_a + e_b)\|^2 - \|\varphi e_a\|^2 - \|\varphi e_b\|^2 = 2 \langle \varphi e_a, \varphi e_b \rangle$ , und andererseits wegen (3) und weil die  $e_a$  paarweise senkrecht zueinander sind  $\|\varphi(e_a + e_b)\|^2 - \|\varphi e_a\|^2 - \|\varphi e_b\|^2 = \|e_a + e_b\|^2 - \|e_a\|^2 - \|e_b\|^2 = 0$ . Also,  $\langle \varphi e_a, \varphi e_b \rangle = 0$  für  $a \neq b$ . Somit ist auch  $\{\varphi e_1, \varphi e_2, \varphi e_3\}$  eine orthonormale Basis von  $\mathbb{E}$ .

(4)  $\Leftrightarrow$  (1) :

Für beliebige Vektoren  $v, w \in \mathbb{E}$  ist  $\langle \varphi v, \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle$  nachzuweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf  $v \neq 0_{\mathbb{E}}$  angenommen werden.

Sei zunächst  $v = \alpha w$  ( $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$ ). Dann gilt wegen der Linearität von  $\varphi$  folgendes:  $\langle \varphi v, \varphi w \rangle = \alpha \langle \varphi v, \varphi v \rangle = \alpha \|\varphi v\|^2$ . Sei  $e \in \mathbb{E}$  der durch  $v = \|v\| e$  gegebene Einheitsvektor in Richtung  $v$ . Wir wenden nun (4) auf den durch  $e$  aufgespannten Unterraum von  $\mathbb{E}$  an und folgern, daß mit  $e$  auch  $\varphi e$  eine orthonormale Basis dieses Unterraum sein muß. Also gilt  $\|\varphi e\| = 1$ . Einsetzen liefert für den Fall von linear abhängigen Vektoren  $\langle \varphi v, \varphi w \rangle = \alpha \|v\|^2 = \langle v, w \rangle$ , woraus die Aussage folgt.

Die Vektoren  $v, w \in \mathbb{E}$  seien nun linear unabhängig. Dann spannen sie einen zweidimensionalen Unterraum von  $\mathbb{E}$  auf. Mit dem Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt gelingt es für diesen Unterraum eine Orthonormalbasis  $\{f_1, f_2\}$  zu konstruieren. Relativ zu dieser Basis gelte  $v = v^1 f_1 + v^2 f_2$  und  $w = w^1 f_1 + w^2 f_2$  mit  $v^1, v^2, w^1, w^2 \in \mathbb{R}$ . Wegen (4) ist auch  $\{\varphi f_1, \varphi f_2\}$  eine orthonormale Basis dieses Unterraums. Daher gilt  $\langle \varphi v, \varphi w \rangle = v^1 w^1 + v^2 w^2 = \langle v, w \rangle$ , was zu zeigen war. ■

Wir erinnern noch kurz an

**Konzept 1.2.19 — Adjungierte Abbildung.** Eine lineare Abbildung  $\varphi^\dagger : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  heißt eine zu  $\varphi$  **adjungierte Abbildung**, wenn für alle Vektoren  $v, w \in \mathbb{E}$   $\langle \varphi v, w \rangle = \langle v, \varphi^\dagger w \rangle$  gilt.

Damit gilt ebenfalls  $\langle v, \varphi w \rangle = \langle \varphi^\dagger v, w \rangle$ . Im allgemeinen braucht es zu einer linearen Abbildung keine adjungierte Abbildung zu geben. Falls es aber eine gibt, so ist diese auch eindeutig. Ist der Vektorraum endlich dimensional, wie in unserem Fall, dann existiert zu jeder linearen Abbildung die adjungierte Abbildung.

**Aussage 1.2.13** Sei  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  eine orthogonale Abbildung. Dann ist auch  $\varphi^{-1}$  eine orthogonale Abbildung. Es existiert die zu  $\varphi$  adjungierte Abbildung  $\varphi^\dagger$ , und es gilt  $\varphi^\dagger = \varphi^{-1}$ . Ist umgekehrt  $\varphi$  ein Isomorphismus mit  $\varphi^{-1} = \varphi^\dagger$ , so ist  $\varphi$  eine orthogonale Abbildung.

**Begründung:** Sei  $\varphi$  eine orthogonale Abbildung. Zu beliebigen Vektoren  $x, y \in \mathbb{E}$  gibt es Vektoren  $v, w \in \mathbb{E}$  mit  $x = \varphi v$  und  $y = \varphi w$ . Es folgt

$$\langle \varphi^{-1}x, \varphi^{-1}y \rangle = \langle \varphi^{-1} \circ \varphi v, \varphi^{-1} \circ \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle = \langle \varphi v, \varphi w \rangle = \langle x, y \rangle. \quad (1.54)$$

Damit ist auch  $\varphi^{-1}$  eine orthogonale Abbildung. Weiterhin gilt

$$\langle \varphi v, y \rangle = \langle \varphi v, \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle = \langle v, \varphi^{-1}y \rangle. \quad (1.55)$$

Somit ist  $\varphi^{-1}$  die zu  $\varphi$  adjungierte Abbildung.

Umgekehrt sei  $\varphi$  ein Isomorphismus mit  $\varphi^\dagger = \varphi^{-1}$ . Dann folgt

$$\langle \varphi v, \varphi w \rangle = \langle v, \varphi^\dagger \circ \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle. \quad (1.56)$$

Also ist  $\varphi$  eine orthogonale Abbildung. ■

Für  $\dim E < \infty$  bereiten wir im folgenden die Matrixdarstellung einer orthogonalen Abbildung vor. Darstellungstheoretische Konzepte können hier nicht angemessen behandelt werden, dafür seien Sie auf das überaus wichtige Gebiet der Darstellungstheorie (von sogenannten Lie-Gruppen) verwiesen. Unserem Verständnis tut dies aber keinen Abbruch, da abstrakte Darstellungskonzepte hier sehr intuitiv algebraisch genutzt werden. In der Tat entspricht das Niveau unserer Erläuterung in etwa dem, welches Sie in einer einführenden Vorlesung über Lineare Algebra genießen können.

**Konzept 1.2.20 — Orthogonale Matrix.** Eine reelle quadratische Matrix  $\alpha$  heißt eine **orthogonale Matrix**, wenn sie regulär ist und wenn  $\alpha^{-1} = \alpha^T$  gilt.

**Aussage 1.2.14** Es gelte  $\dim E < \infty$ . Ein Endomorphismus  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist genau dann orthogonal, wenn ihm hinsichtlich einer beliebigen Orthonormalbasis von  $\mathbb{E}$  eine orthogonale Matrix entspricht.

**Begründung:** Relativ zu einer beliebigen Orthonormalbasis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  von  $\mathbb{E}$  entspreche  $\varphi$  die Matrix  $\alpha$ . Dann ist der adjungierten Abbildung  $\varphi^\dagger$  hinsichtlich dieser Basis die Matrix  $\alpha^\dagger$  zugeordnet. Dies sehen wir so ein: Die Elemente der Matrix  $\alpha$  sind durch die Gleichungen

$$\varphi e_a = \sum_{b \in \mathcal{I}(3)} \langle \varphi e_a, e_b \rangle e_b, \quad a \in \mathcal{I}(3) \quad (1.57)$$

bestimmt. Die Elemente der  $\varphi^\dagger$  zugeordneten Matrix  $\mathfrak{b}$  sind durch

$$\varphi^\dagger e_b = \sum_{a \in \mathcal{I}(3)} \langle \varphi^\dagger e_b, e_a \rangle e_a, \quad b \in \mathcal{I}(3) \quad (1.58)$$

bestimmt. Hieraus folgt aber wegen der Symmetrie des Skalarprodukts

$$\langle \varphi^\dagger e_b, e_a \rangle = \langle e_a, \varphi^\dagger e_b \rangle = \langle \varphi e_a, e_b \rangle, \quad (1.59)$$

und somit  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^\dagger$ , was zu zeigen war<sup>4</sup>. Daher ist  $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^\dagger$  äquivalent zu  $\varphi^{-1} = \varphi^\dagger$ . Die Aussage folgt dann aus dem zweiten Teil der Aussage 1.2.13 und damit sind wir fertig. ■

**Aussage 1.2.15** Für eine Matrix  $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}[n]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sind folgende Aussagen paarweise gleichwertig:

(1)  $\mathfrak{a}$  ist eine orthogonale Matrix.

(2) Die Zeilen von  $\mathfrak{a}$  bilden ein Orthonormalsystem, das heißt es gilt

$$\sum_{c \in \mathcal{I}(n)} \mathfrak{a}_{ac} \mathfrak{a}_{cb} = \delta_{ab} \quad (1.60)$$

für alle  $a, b \in \mathcal{I}(n)$ .

(3) Die Spalten von  $\mathfrak{a}$  bilden ein Orthonormalsystem, das heißt es gilt

$$\sum_{c \in \mathcal{I}(n)} \mathfrak{a}_{ca} \mathfrak{a}_{cb} = \delta_{ab} \quad (1.61)$$

für alle  $a, b \in \mathcal{I}(n)$ .

Hierbei sind  $\mathfrak{a}_{ab}$  die Elemente von  $\mathfrak{a}$  hinsichtlich eines beliebigen Koordinatensystems.

**Begründung:** Die Gleichungen aus (2) sind gleichwertig mit  $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^\dagger = E$ , wobei  $E$  die  $(n \times n)$  Einheitsmatrix bezeichne. Die Gleichungen aus (3) sind gleichwertig mit  $\mathfrak{a}^\dagger \mathfrak{a} = E$ . Jeder dieser beiden Gleichungen ist aber äquivalent zu  $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^\dagger$ . ■

**Konzept 1.2.21 — Normaler Endomorphismus.** Ein Endomorphismus  $\varphi$  eines euklidischen Raumes heißt **normal**, wenn der zu ihm adjungierte Endomorphismus  $\varphi^\dagger$  existiert und wenn  $\varphi$  und  $\varphi^\dagger$  vertauschbar sind:  $\varphi \circ \varphi^\dagger = \varphi^\dagger \circ \varphi$ .

**Aussage 1.2.16** Jeder orthogonale Automorphismus  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist normal, und alle Eigenwerte von  $\varphi$  haben den Betrag eins. Insbesondere gilt  $|\text{Det } \varphi| = 1$  im Falle endlicher Dimension von  $\mathbb{E}$ .

**Begründung:** Sei  $\varphi$  orthogonal. Nach Aussage 1.2.13 gilt  $\varphi^\dagger = \varphi^{-1}$ . Daher ist  $\varphi^\dagger$  mit  $\varphi$  vertauschbar. Mit anderen Worten,  $\varphi$  ist normal. Sei  $a$  ein Eigenwert von  $\varphi$  mit  $v$  als Eigenvektor. Wegen Aussage 1.2.12 (3) gilt  $\|v\| = \|\varphi v\| = |a| \|v\|$ . Daraus folgt  $|a| = 1$ . Im Fall endlicher Dimensionen erhalten wir mit den Rechenregeln für Determinanten weiter:  $\text{Det } \varphi = \text{Det } \varphi^\dagger = \text{Det } \varphi^{-1} = 1/\text{Det } \varphi$ . Hieraus folgt  $\text{Det } \varphi = \pm 1$ . ■

<sup>4</sup>Beachten Sie, daß für den Fall von reellen Matrizen die adjungierte gleich der transponierten Matrix ist. Wir verwenden trotzdem die Schreibweise, um ihnen später strukturelle Analogien mit der mathematischen Beschreibung der Quantenmechanik zu erleichtern.

Orthogonale Endomorphismen lassen sich strukturell sehr elegant zusammenfassen:

**Aussage 1.2.17** Die Menge  $\mathfrak{O}$  aller orthogonalen Endomorphismen eines euklidischen Raumes auf sich ist hinsichtlich der Multiplikation (Komposition) der Endomorphismen eine Gruppe, die **orthogonale Gruppe** des Raumes.

**Begründung:** Mit  $\varphi$  und  $\psi$  bildet auch die Komposition  $\psi \circ \varphi$  Orthonormalsysteme auf Orthonormalsysteme ab. Wegen Aussage 1.2.12 (4) folgt daher aus  $\varphi, \psi \in \mathfrak{O}$  auch  $\psi \circ \varphi \in \mathfrak{O}$ . Trivialerweise enthält  $\mathfrak{O}$  die Identität. Schließlich folgt aus  $\varphi \in \mathfrak{O}$  zunächst die Existenz der Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  und wegen Aussage 1.2.12 (3) weiter  $\varphi^{-1} \in \mathfrak{O}$ . ■

Wir wollen jetzt die Matrixgestalt von orthogonalen Endomorphismen besser verstehen. Dies ist etwas umständlich, weil wir Endomorphismen von euklidischen Vektorräumen betrachten. Für diese ist keineswegs die Existenz von reellen Eigenwerten gesichert. Ein erster Schritt ist aber relativ einfach, wenn der Endomorphismus lauter reelle Eigenwerte besitzt:

**Aussage 1.2.18** In einem endlich-dimensionalen euklidischen Raum existiert zu einem Endomorphismus  $\varphi$  genau dann eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $\varphi$ , wenn  $\varphi$  ein normaler Endomorphismus mit lauter reellen Eigenwerten ist.

**Begründung:** Die Aussage hat zwei Begründungsrichtungen:

$\curvearrowright$ : Sei  $\varphi$  ein normaler Endomorphismus mit lauter reellen Eigenwerten. Das heißt, es existiert mindestens ein Eigenwert  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  von  $\varphi$  und zu diesem ein Eigenvektor  $v_1 \in \mathbb{E}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $v_1$  als Einheitsvektor angenommen werden. Im Fall  $n := \text{Dim } \mathbb{E} = 1$  ist die Behauptung bereits bewiesen. Sei also  $1 < n \in \mathbb{N}$ , und die Behauptung sei für die Dimension  $n - 1$  vorausgesetzt. Weiterhin sei  $\mathbb{U}_\perp$  der zu  $v_1$  orthogonale Unterraum von  $\mathbb{E}$ . Offenbar gilt  $\text{Dim } \mathbb{U}_\perp = n - 1$ . Aus  $r \in \mathbb{U}_\perp$ , also  $\langle r, v_1 \rangle = 0$ , folgt

$$0 = \lambda_1 \langle r, v_1 \rangle = \langle r, \varphi^\dagger v_1 \rangle = \langle \varphi r, v_1 \rangle, \quad (1.62)$$

weil  $\varphi$  und  $\varphi^\dagger$  dieselben Eigenvektoren besitzen und nach Annahme alle Eigenwerte reell sind. Daher gilt auch  $\varphi r \in \mathbb{U}_\perp$  und weiter  $\varphi \mathbb{U}_\perp \subseteq \mathbb{U}_\perp$ . Somit induziert  $\varphi$  einen normalen Endomorphismus von  $\mathbb{U}_\perp$ . Nach Voraussetzung (die Behauptung gelte für die Dimension  $n - 1$  und  $\text{Dim } \mathbb{U}_\perp = n - 1$ ) gibt es eine Orthonormalbasis  $\{e_2, \dots, e_n\}$  von  $\mathbb{U}_\perp$ , die aus lauter Eigenvektoren von  $\varphi$  besteht. Dann ist  $\{v_1, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{E}$ , die aus lauter Eigenvektoren von  $\varphi$  besteht.

$\curvearrowleft$ : Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis, die aus lauter Eigenvektoren von  $\varphi$  besteht. Es gilt also  $\varphi e_a = \lambda_a e_a$  für alle  $a \in \mathcal{I}(n)$ . Durch  $\psi e_a = \lambda_a e_a$  wird dann ein Endomorphismus  $\psi$  auf  $\mathbb{E}$  definiert. Für  $a, b \in \mathcal{I}(n)$  gilt

$$\langle \varphi e_a, e_b \rangle = \langle \lambda_a e_a, e_b \rangle = \lambda_a \delta_{ab} = \lambda_b \delta_{ab} = \langle e_a, \lambda_b e_b \rangle = \langle e_a, \psi e_b \rangle, \quad (1.63)$$

und daher allgemein  $\langle \varphi v, w \rangle = \langle v, \psi w \rangle$ . Somit ist  $\psi$  der zu  $\varphi$  adjungierte Endomorphismus  $\varphi^\dagger$ . Wegen

$$\varphi^\dagger(\varphi e_a) = \psi(\lambda_a e_a) = \lambda_a \lambda_a e_a = \varphi(\lambda_a e_a) = \varphi(\psi e_a) = \varphi(\varphi^\dagger e_a) \quad (1.64)$$

für alle  $a \in \mathcal{I}(n)$ , folgt schließlich  $\varphi^\dagger \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^\dagger$ . Das bedeutet, der Endomorphismus  $\varphi$  ist normal.

Damit haben wir beide Richtungen der Aussage begründet. ■

Wir benötigen allerdings den allgemeinen Fall, das heißt, der Endomorphismus hat auch Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im } \lambda \neq 0$ . Sei  $\mathbb{E}$  ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum. Dieser wird nun zunächst in einen komplexen Vektorraum eingebettet: Die Menge  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  bestehe aus allen geordneten Paaren von Vektoren aus  $\mathbb{E}$ . Jedes Element  $z \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  besitzt also die Form  $z = (v, w)$  mit Vektoren  $v, w \in \mathbb{E}$ . Ist  $z' = (v', w')$  ein weiteres Element aus  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ , so vereinbaren wir  $z + z' = (v + v', w + w')$ . Ist  $\alpha$  eine komplexe Zahl, so sei  $\alpha z = (\text{Re } \alpha v - \text{Im } \alpha w, \text{Re } \alpha w + \text{Im } \alpha v)$ . Offenbar ist  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  hinsichtlich der so definierten linearen Operationen ein komplexer Vektorraum mit dem Paar  $(0_{\mathbb{E}}, 0_{\mathbb{E}})$  als Nullvektor. In  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  kann der Vektorraum  $\mathbb{E}$  folgendermaßen eingebettet werden: Jedem Vektor  $v \in \mathbb{E}$  werde als Bild das Paar  $\varphi v = (v, 0_{\mathbb{E}})$  aus  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  zugeordnet. Dann gilt

$$\varphi(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2, 0_{\mathbb{E}}) = (v_1, 0_{\mathbb{E}}) + (v_2, 0_{\mathbb{E}}) = \varphi v_1 + \varphi v_2. \quad (1.65)$$

Ist außerdem  $c \in \mathbb{R}$ , so können wir sie auch als komplexe Zahl  $c = c + 0_{\mathbb{R}} i$  auffassen. Per definitionem ist  $\varphi(cv) = (cv, 0_{\mathbb{E}}) = c(v, 0_{\mathbb{E}}) = c\varphi v$ . Da  $\varphi$  außerdem injektiv ist, wird  $\mathbb{E}$  durch  $\varphi$  isomorph in  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  eingebettet. Daher können die Paare  $(v, 0_{\mathbb{E}})$  direkt mit den entsprechenden Vektoren  $v \in \mathbb{E}$  identifiziert werden. Wegen  $i(v, 0_{\mathbb{E}}) = (0_{\mathbb{E}}, v)$  gilt dann im Sinne dieser Identifikation  $(v, w) = v + i w$ . Der so konstruierte Vektorraum  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  heißt die **komplexe Erweiterung** des reellen Vektorraums  $\mathbb{E}$ .

Tatsächlich handelt es sich bei der komplexen Erweiterung  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  des reellen Vektorraums  $\mathbb{E}$  um einen unitären Raum, was wir aber hier in der gebotenen Kürze nicht tiefer würdigen können. Unitäre Räume sind natürliche Verallgemeinerungen von euklidischen Räumen. Das Skalarprodukt von  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  ist durch  $(v_1, w_1) \cdot (v_2, w_2) = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle + i \langle w_1, v_2 \rangle - i \langle w_2, v_1 \rangle$  gegeben. Weiterhin wird  $\varphi$  durch  $\hat{\varphi}(v, w) := (\varphi v, \varphi w)$  zu einem Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  von  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  fortgesetzt.

**Aussage 1.2.19** Sei  $\varphi$  ein normaler Endomorphismus von  $\mathbb{E}$ . Dann ist seine Fortsetzung  $\hat{\varphi}$  ein normaler Endomorphismus von  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ .

**Begründung:** Für  $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  gilt

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(v_1, w_1)] \cdot (v_2, w_2) &= \\ &= (\varphi v_1, \varphi w_1) \cdot (v_2, w_2) = \\ &= \langle \varphi v_1, v_2 \rangle + \langle \varphi w_1, w_2 \rangle + i \langle \varphi w_1, v_2 \rangle - i \langle w_2, \varphi v_1 \rangle = \\ &= \langle v_1, \varphi^\dagger v_2 \rangle + \langle w_1, \varphi^\dagger w_2 \rangle + i \langle w_1, \varphi^\dagger v_2 \rangle - i \langle \varphi^\dagger w_2, v_1 \rangle = \\ &= (v_1, w_1) \cdot (\varphi^\dagger v_2, \varphi^\dagger w_2). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Daher gilt für den zu  $\hat{\varphi}$  adjungierten Endomorphismus  $\hat{\varphi}^\dagger(v_2, w_2) = (\varphi^\dagger v_2, \varphi^\dagger w_2)$ . Hieraus folgt  $\hat{\varphi}^\dagger \circ \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}^\dagger$  wegen der Definition der Fortsetzung  $\hat{\varphi}$  und der Normalität des Endomorphismus  $\varphi$ . ■

**Aussage 1.2.20** Es sei  $\varphi$  ein normaler Endomorphismus von  $\mathbb{E}$  und  $e = v + iw$  ein normierter Eigenvektor seiner Fortsetzung  $\hat{\varphi}$  mit dem nicht-reellen Eigenwert  $c$ . Dann ist auch  $e' = v - iw$  ein normierter Eigenvektor von  $\hat{\varphi}$  mit dem Eigenwert  $\bar{c}$ . Weiterhin sind  $e$  und  $e'$  orthogonal.

**Begründung:** Da  $e$  und  $e'$  Vektoren in einem euklidischen Raum  $\mathbb{E}$  sind, gilt  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  und daher  $e' \cdot e' = \|v\|_{\mathbb{E}}^2 + \|w\|_{\mathbb{E}}^2 + i \langle w, v \rangle - i \langle v, w \rangle = (e, e)_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}$ . Mit  $e$  ist also auch  $e'$  normiert bezüglich der durch  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}$  induzierten Norm auf der komplexen Erweiterung  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ . Weiterhin gilt mit  $c = \operatorname{Re} c + i \operatorname{Im} c$  wegen

$$\hat{\phi} e = (\phi v, \phi w) = c e = (\operatorname{Re} v - \operatorname{Im} c w, \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} c v) \quad (1.67)$$

zunächst  $\phi v = \operatorname{Re} v - \operatorname{Im} c w$ ,  $\phi w = \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} c v$  und daher weiter

$$\begin{aligned} \hat{\phi} e' &= (\phi v, -\phi w) = (\operatorname{Re} v - \operatorname{Im} c w, -\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} c v) = \\ &= (\operatorname{Re} - i \operatorname{Im} c)(v, -w) = \bar{c} e'. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Das heißt  $e'$  ist Eigenvektor von  $\hat{\phi}$  mit dem Eigenwert  $\bar{c}$ . Da  $\hat{\phi}$  ein normaler Endomorphismus ist, also  $\hat{\phi} \circ \hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}^\dagger \circ \hat{\phi}$ , folgt  $\hat{\phi} e' \cdot \hat{\phi} = e' \cdot \hat{\phi}^\dagger(\hat{\phi} e') = e' \cdot \hat{\phi}(\hat{\phi}^\dagger e') = \hat{\phi}^\dagger e' \cdot \hat{\phi}^\dagger e'$ . Daher ist  $e'$  auch Eigenvektor von  $\hat{\phi}^\dagger$  mit dem Eigenwert  $c$ , denn

$$\begin{aligned} (\hat{\phi} - \bar{c} \operatorname{id}_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}) e' \cdot (\hat{\phi} - \bar{c} \operatorname{id}_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}) e' &= \\ &= \hat{\phi} e' \cdot \hat{\phi} e' + |c|^2 e' \cdot e' - \bar{c} e' \cdot \hat{\phi} e' - c \hat{\phi} e' \cdot e' = \\ &= \hat{\phi}^\dagger e' \cdot \hat{\phi}^\dagger e' + |c|^2 e' \cdot e' - \bar{c} \hat{\phi}^\dagger e' \cdot e' - c e' \cdot \hat{\phi}^\dagger e' = \\ &= (\hat{\phi}^\dagger - c \operatorname{id}_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}) e' \cdot (\hat{\phi}^\dagger - c \operatorname{id}_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}) e' \end{aligned} \quad (1.69)$$

Damit ist  $\hat{\phi} e' = \bar{c} e'$  gleichwertig mit  $\hat{\phi}^\dagger e' = c e'$ . Somit ist  $e'$  Eigenvektor von  $\hat{\phi}^\dagger$  zum Eigenwert  $c$ . Es folgt

$$c e \cdot e' = (c e) \cdot e' = \hat{\phi} e \cdot e' = e \cdot \hat{\phi}^\dagger e' = \bar{c} e \cdot e'. \quad (1.70)$$

Nach Voraussetzung ist  $c \neq \bar{c}$  ( $c$  wurde als nicht-reelle angenommen), daher folgt weiter  $e \cdot e' = 0$ . ■

Wir können uns nun endlich dem allgemeinen Fall normaler Endomorphismen in euklidischen Räumen widmen.

**Aussage 1.2.21** Sei  $\mathbb{E}$  ein euklidischer Raum mit  $\dim \mathbb{E} = n \in \mathbb{N}$ . Ein Endomorphismus  $\phi$  von  $\mathbb{E}$  ist genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{E}$  gibt, hinsichtlich derer  $\phi$  eine reelle Matrix  $A$  folgender Gestalt zugeordnet ist:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_r & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{matrix}} & & & \mathbf{0} \\ & & & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & & \boxed{\begin{matrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{matrix}} & \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

wobei  $d_1, \dots, d_r$  ( $r \in \mathcal{I}(n)$ ) die reellen Eigenwerte von  $\phi$  sind und jedem Zweierkästchen ein Paar  $z_k, \bar{z}_k$  ( $k \in \mathcal{I}(n - \max r)$ ) komplex-konjugierter Eigenwerte von  $\phi$  entspricht, und es gilt  $c_k = \operatorname{Re} z_k$ ,  $s_k = \operatorname{Im} z_k$ .

**Begründung:**

↪: Sei  $\varphi$  ein normaler Endomorphismus von  $\mathbb{E}$ . Im Fall  $n = 1$  ist die Aussage trivial zu begründen. Es gelte jetzt  $n > 1$  und für Dimensionen  $m < n$  sei die Aussage vorausgesetzt. Besitzt  $\varphi$  reelle Eigenwerte, so können wir wie in der Begründung von Aussage 1.2.18 schließen. Es genügt somit, den Fall zu analysieren, in dem  $\varphi$  keinen reellen Eigenwert besitzt. In diesem Fall betten wir  $\mathbb{E}$  in seine komplexe Erweiterung  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  ein und setzen  $\varphi$  zu dem Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  von  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  fort. Weiterhin sei  $z$  ein nicht-reeller Eigenwert von  $\hat{\varphi}$ . Zu diesem gibt es dann einen normierten Einheitsvektor  $e \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ . Wir setzen  $e = (v, w)$  mit  $v, w \in \mathbb{E}$ . Nach Aussage 1.2.20 ist dann auch  $e' = (v, -w)$  ein normierter und zu  $e$  senkrechter Eigenvektor von  $\hat{\varphi}$  mit dem Eigenwert  $\bar{z}$ . Weiter setzen wir (wie vereinbart identifizieren wir einen beliebigen Vektor  $x \in \mathbb{E}$  mit  $(x, 0_{\mathbb{E}}) \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ )

$$f \stackrel{\text{def}}{=} (e + e') / \sqrt{2} = \sqrt{2}v, \quad f' \stackrel{\text{def}}{=} (e - e') / (\sqrt{2}i) = \sqrt{2}w. \quad (1.72)$$

Offenbar sind  $f, f' \in \mathbb{E}$ . Wegen  $\langle f, f \rangle = (f, 0_{\mathbb{E}}) \cdot (f, 0_{\mathbb{E}}) = (e \cdot e + e' \cdot e') / 2 = 1$ ,  $\langle f', f' \rangle = (f', 0_{\mathbb{E}}) \cdot (f', 0_{\mathbb{E}}) = (e \cdot e + e' \cdot e') / 2 = 1$  sind die Vektoren  $f, f'$  normiert und wegen

$$\langle f, f' \rangle = (f, 0_{\mathbb{E}}) \cdot (f', 0_{\mathbb{E}}) = (e' \cdot e' + e \cdot e' - e \cdot e - e' \cdot e) / (2i) = 0 \quad (1.73)$$

auch orthogonal. Wegen  $e = (f + if') / \sqrt{2}$  und  $e' = (f - if') / \sqrt{2}$  ist weiterhin

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f, 0_{\mathbb{E}}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\varphi}e + \hat{\varphi}e') = \frac{1}{\sqrt{2}} (ze + \bar{z}e') = \\ &= \frac{1}{2} (z + \bar{z})f + \frac{i}{2} (z - \bar{z})f' = (\operatorname{Re} z)f - (\operatorname{Im} z)f', \\ \hat{\varphi}(f', 0_{\mathbb{E}}) &= \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{\varphi}e - \hat{\varphi}e') = \frac{1}{\sqrt{2}i} (ze - \bar{z}e') = \\ &= \frac{1}{2i} (z - \bar{z})f + \frac{1}{2} (z + \bar{z})f' = (\operatorname{Im} z)f + (\operatorname{Re} z)f'. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Hinsichtlich  $f, f'$  entspricht also  $\varphi$  ein Zweierkästchen der behaupteten Art. Weiter verläuft die Begründung wie bei Aussage 1.2.18 mit  $\mathbb{U}_{\perp} = \{f, f'\}^{\perp}$ . Wie dort folgt  $\varphi\mathbb{U}_{\perp} \subseteq \mathbb{U}_{\perp}$  so, daß  $\varphi$  einen normalen Endomorphismus von  $\mathbb{U}_{\perp}$  induziert, auf den die Induktionsvoraussetzung angewandt werden kann, da  $\dim \mathbb{U}_{\perp} = n - 2 < n$ .

↪: Bleibt Ihnen als Inspiration überlassen. ■

Wegen Aussage 1.2.16 müssen alle reellen Eigenwerte eines orthogonalen Automorphismus  $\varphi$  den Wert  $+1$  oder  $-1$  haben. Ferner gilt für die Elemente  $c_k, s_k$  eines Zweierkästchens  $c_k = \operatorname{Re} z_k$  und  $s_k = \operatorname{Im} z_k$ , wobei  $z_k$  ein nicht-reeller Eigenwert der komplexen Fortsetzung  $\hat{\varphi}$  von  $\varphi$  ist. Auch für diesen muß  $\|z_k\|_{\mathbb{C}} = 1$  gelten. Es gibt daher genau einen Winkel  $\alpha_k \in ]-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$  mit  $\cos \alpha_k = \operatorname{Re} z_k$  und  $\sin \alpha_k = -\operatorname{Im} z_k$ . Wir fassen zusammen:

**Aussage 1.2.22** Jedem orthogonalen Automorphismus  $\varphi$  von  $\mathbb{E}$  entspricht hinsichtlich





**Aussage 1.2.24** Sei  $\varphi$  eine Drehung eines zwei-dimensionalen, orientierten euklidischen Raums  $\mathbb{E}$ . Dann gibt es einen Winkel  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  mit folgender Eigenschaft: Hinsichtlich jeder positiv orientierten Orthonormalbasis ist  $\varphi$  dieselbe Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

zugeordnet. Hinsichtlich jeder negativ orientierten Orthonormalbasis entspricht  $\varphi$  die Matrix  $R^T$ .

**Begründung:** Sei  $\{e_1, e_2\}$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $\mathbb{E}$ . Für  $a \in \mathcal{I}(2)$  gilt

$$\varphi e_a = \sum_{b \in \mathcal{I}(2)} \langle \varphi e_a, e_b \rangle e_b. \quad (1.77)$$

Wegen  $\|\varphi e_a\| = \|e_a\| = 1$  ist  $\langle \varphi e_a, e_1 \rangle^2 + \langle \varphi e_a, e_2 \rangle^2 = \|e_a\|^2 = 1$ . Daher gibt es einen Winkel  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  mit  $\cos \alpha = \langle \varphi e_1, e_1 \rangle$ ,  $\sin \alpha = \langle \varphi e_1, e_2 \rangle$ . Also  $\varphi e_1 = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$ . Wie hängen die inneren Produkte  $\langle \varphi e_2, e_1 \rangle$  und  $\langle \varphi e_2, e_2 \rangle$  mit dem Winkel  $\alpha$  zusammen? Da die Zeilen von  $R$  ein Orthonormalsystem bilden, folgt  $0 = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \varphi e_1, \varphi e_2 \rangle = \cos \alpha \langle e_1, \varphi e_2 \rangle + \sin \alpha \langle e_2, \varphi e_2 \rangle$ . Weiterhin gilt  $1 = \text{Det } \varphi = \cos \alpha \langle \varphi e_2, e_2 \rangle - \sin \alpha \langle \varphi e_2, e_1 \rangle$ . Dieses lineare Gleichungssystem besitzt die eindeutig bestimmte Lösung  $\langle \varphi e_2, e_1 \rangle = -\sin \alpha$ ,  $\langle \varphi e_2, e_2 \rangle = \cos \alpha$ . Daher hat die  $\varphi$  hinsichtlich  $\{e_1, e_2\}$  zugeordnete Matrix  $R$  die behauptete Gestalt. Die Begründung der anderen Aussagen ( $R$  besitzt diese Gestalt hinsichtlich jeder positiv orientierten Orthonormalbasis und  $\varphi$  wird  $R^T$  hinsichtlich jeder negativ orientierten Orthonormalbasis zugeordnet) überlassen wir Ihren intellektuellen Fingerübungen. ■

Der Winkel  $\alpha$  heißt der zu der Drehung  $\varphi$  gehörende **orientierte Drehwinkel**. Mittels bekannter trigonometrischer Beziehungen folgt

**Aussage 1.2.25** Die Gruppe aller zwei-dimensionalen Drehungen ist abelsch. Sind  $\varphi$  und  $\psi$  zwei-dimensionale Drehungen mit den orientierten Drehwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , so ist der orientierte Drehwinkel der Komposition  $\psi \circ \varphi$  der modulo  $2\pi$  gerechnete Winkel  $\alpha + \beta$ .

Wir kommen nun zu Drehungen eines drei-dimensionalen euklidischen Raums. Hinsichtlich einer geeigneten Orthonormalbasis wird eine solche Drehung  $\varphi$  durch eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

beschrieben. Beachten Sie, daß hier ein beliebiger Basisvektor  $e_1$  auf der Drehachse liegt, das heißt  $\varphi e_1 = e_1$ , und wir daher bereits den allgemeinen Fall betrachten (bei geeigneter Wahl der Orthonormalbasis). Genauer: Wenn  $\varphi$  nicht die Identität ist, also  $\alpha \neq 0$ , dann erzeugen die Eigenvektoren zum Eigenwert  $+1$  einen ein-dimensionalen Unterraum, der die **Drehachse** von  $\varphi$  genannt wird. Der zur Drehachse senkrechte, zwei-dimensionale Unterraum heißt die **Drehebene** von  $\varphi$ . Diese ist weiterhin dadurch gekennzeichnet, daß sie von  $\varphi$  auf sich selbst abgebildet wird. Daher induziert  $\varphi$  in der Drehebene eine Drehung

(zwei-dimensional) und bestimmt nach Aussage 1.2.24 den Drehwinkel  $\alpha$ . Dieser ist allerdings zunächst nur bis auf das Vorzeichen festgelegt, das erst durch die Wahl einer Orientierung in der Drehebene eindeutig bestimmt wird. Der Kosinus des Drehwinkels kann einfach mit Hilfe der Spur ermittelt werden: Es gilt  $\text{Sp } R = 1 + 2 \cos \alpha$ . Da aber ähnliche Matrizen dieselbe Spur besitzen, kann diese Gleichung auch dann zur Berechnung von  $\cos \alpha$  herangezogen werden, wenn  $R$  eine Matrix ist, die  $\varphi$  hinsichtlich irgendeiner (nicht notwendig orthonormalen) Basis entspricht. Zusammenfassend gilt somit:

**Aussage 1.2.26** Eine von der Identität verschiedene Drehung  $\varphi$  eines drei-dimensionalen euklidischen Raumes bestimmt eindeutig eine Drehachse und bis auf das Vorzeichen einen Drehwinkel  $\alpha$ . Die Drehachse wird von jedem zum Eigenwert  $+1$  gehörenden Eigenvektor erzeugt. Für den Drehwinkel gilt  $\cos \alpha = (\text{Sp } \varphi - 1)/2$ . Ist  $\varphi$  hinsichtlich einer beliebigen Basis die Matrix  $R = (r_{ab})$  zugeordnet, so folgt

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1). \quad (1.79)$$

Es ist bedauerlich, daß wir hier weder auf Lie-Gruppen, noch auf deren Darstellungstheorie weder algebraisch noch geometrisch eingehen können. Wir heben uns dies für später auf, wollen aber noch auf eine übliche Nomenklatur hinweisen: Die **allgemeine lineare Gruppe**  $GL(n, \mathbb{R})$  ist die Gruppe aller invertierbaren reellen  $(n \times n)$ -Matrizen. Bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller  $(n \times n)$ -Matrizen mit  $\mathbb{R}(n)$ , so ist

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}(n) : \text{Det } A \neq 0\}. \quad (1.80)$$

Abgeschlossene Untergruppen von  $GL(n, \mathbb{R})$  heißen **Matrixgruppen** beziehungsweise **lineare Lie-Gruppen**. Einige für uns wichtige Beispiele von Matrixgruppen sind:

1. Die **spezielle lineare Gruppe**:

$$SL(n, \mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{R}(n) : \text{Det } A = 1\}, \quad (1.81)$$

2. Die **orthogonale Gruppe**:

$$O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{R}(n) : A^T A = \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}, \quad (1.82)$$

3. Die **spezielle orthogonale Gruppe**:

$$SO(n) \stackrel{\text{def}}{=} O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}). \quad (1.83)$$

Beachten Sie, daß vereinbarungsgemäß bei der orthogonalen Gruppe und der speziellen orthogonalen Gruppe der Zahlenkörper nicht explizit im Gruppennamen aufgeführt wird. Dies passiert nur, wenn es sich nicht um den reellen Zahlenkörper handelt. Also bedeutet hier  $SO(n) \equiv SO(n, \mathbb{R})$ . Es gibt viel mehr Matrixgruppen, die für die Naturbeschreibung relevant sind, aber wir begnügen uns hier mit diesen.

### 1.2.3 Relativität des Ursprungs in Raum und Zeit

Wir wissen bereits, daß die Fixierungen des Ursprungs im Raum und in der Zeit relativ sind, dafür wurde ja gerade das Konzept des affinen Raumes bereitgestellt. Dies impliziert, daß physikalische Gesetze abgeschlossener Systeme auch invariant sind gegenüber Translationen in Raum- und Zeitkoordinaten:  $T_w(t, q) := (t, q + w)$  für  $w \in \mathbb{E}$  und  $T_\tau(t, q) := (t + \tau, q)$  für  $\tau \in \mathbb{R}$ .

### 1.2.4 Galilei-Gruppe und Relativitätsprinzip von Galilei

Wir fassen unsere Symmetrie-Untersuchungen zusammen.

**Konzept 1.2.24 — Eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe.** Die speziellen Galilei-Transformationen, Drehungen und Translationen in Raum und Zeit erzeugen eine Gruppe  $\mathcal{G}$  von bijektiven Abbildungen auf der Galilei-Raumzeit, die **eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe** genannt wird.

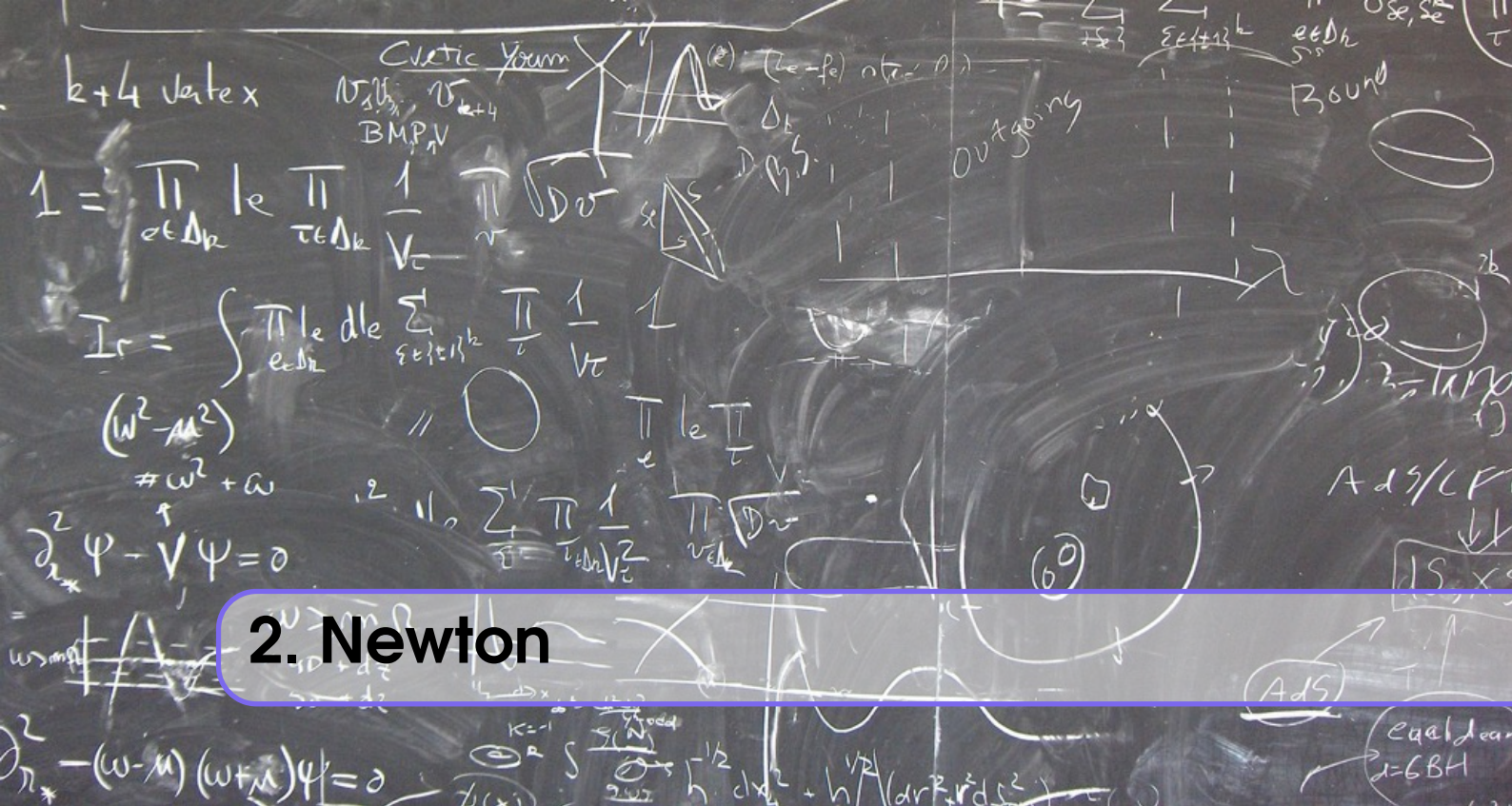
Das erweiterte oder allgemeine Relativitätsprinzip von Galilei besagt:

**Prinzip 1.2.3 — Relativitätsprinzip von Galilei.** Alle Inertialsysteme sind in der klassischen Mechanik gleichberechtigt. Die grundlegenden Gesetze abgeschlossener mechanischer Systeme sind invariant gegenüber Transformationen der eigentlichen, orthochronen Galilei-Gruppe.

Diese Invarianz folgt aus der Gleichberechtigung aller inertialen Beobachtern, von denen niemand sinnvoll ausgezeichnet werden kann. Diese Aussage ist mächtiger, als sie es Ihnen zunächst erscheinen mag, denn durch Symmetrien wird zum einen die Gestalt der Theorie wesentlich eingeschränkt, und zum anderen implizieren sie auch Erhaltungsgrößen, denen meistens wichtige physikalische Größen entsprechen. Beide Aussagen nehmen wir im Moment einmal hin, quasi als Vorschuss für unsere intellektuellen Mühen. Es wird sich zeigen, daß im Falle der Galilei-Gruppe zehn Erhaltungsgrößen impliziert werden: Die drei Komponenten des (linearen) Impulses, die Energie, die drei Komponenten des Drehimpulses und die drei Geschwindigkeitskomponenten des Massenschwerpunktes. Alle diese Beobachtungsgrößen sind unter dem Fluch (oder Segen) der Symmetriegruppe  $\mathcal{G}$  dazu verdammt (berufen) für alle abgeschlossenen mechanischen Systeme während deren Evolution erhalten zu bleiben.

## 1.3 Die Sprache der Klassischen Mechanik

In der klassischen Mechanik sind zwei Vektorräume von grundlegender Bedeutung. Zum einen ist dies der euklidische Raum  $\mathbb{E}$ . Dieser trägt die (instantane) geometrische Struktur der Galilei-Raumzeit. Die zugehörige Punktmenge  $\mathbb{R}^3$  ist die Menge der möglichen physikalischen Ereignisse. Sie wird uns als Konfigurationsraum oder Lageraum von Punktmassen in der Galilei-Raumzeit dienen. Zum anderen, bisher vernachlässigt, ist dies der Dualraum  $\mathbb{E}^*$  von  $\mathbb{E}$ , das heißt die Menge aller linearen Abbildungen  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $\mathbb{E}$  in den reellen Zahlenkörper. Die Bedeutung des Dualraums können wir sogleich würdigen: Für  $r \in \mathbb{E}$  und  $\varphi \in \mathbb{E}^*$  definieren wir durch  $(r, \varphi) := \varphi r$



## 2. Newton

Die Mechanik nach Newton ist in Lehrbüchern der Physik und der Kulturgeschichte ausgiebig und facettenreich geehrt worden, und dürfte Ihnen bereits begegnet sein auf Ihren Bildungspfaden und Denkabenteuern. Darum und weil sie in anderen Gewändern noch schöner erscheint, ist ihr in diesem Kapitel lediglich ein knapper Platz für eine grobe Skizze reserviert. Hier warten viele intellektuelle Fingerübungen, diese Skizze mittels analytischen Denkens zu verfeinern und zu bereichern.

### 2.1 Kinematische Aspekte

Bei folgendem Prinzip der Bestimmtheit ist zu beachten, daß wir noch keine Bewegungsgleichung postuliert haben. Wir stehen ja erst am Beginn des axiomatischen Aufbaus der Theorie. Damit ist das Prinzip nichttrivial.

**Prinzip 2.1.1 — Prinzip der Bestimmtheit.** Für ein Punktteilchen in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R} \times \mathbb{E}, +)$  seien folgende Daten zur Zeit  $t_0 \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  bekannt: Die Lage  $\gamma(t_0)$  auf der Faser  $\Delta^{-1}(t_0) = \mathbb{E}_{t_0}$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\gamma}_{\gamma(t_0)} \in T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{E}_{t_0}$ . Damit ist die Bewegung  $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{G}$  der Punktmasse für alle in  $\mathcal{I}$  enthaltenen Zeiten bestimmt.

Wir können fragen, warum diese Daten die Bewegung vollständig bestimmen. Zum Beispiel hätten wir ja auch die Kenntnis einer Anfangsbeschleunigung fordern können. Dies wird in folgender Verschärfung des Prinzips zurückgewiesen, allerdings ohne unsere Frage zu beantworten.

**Prinzip 2.1.2 — Verschärfung des Prinzips der Bestimmtheit.** Die Anfangslage  $\gamma(t_0) \in \mathbb{E}_{t_0}$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\gamma}_{\gamma(t_0)} \in T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^3$  eines Punktteilchens in einer Galilei-Raumzeit bestimmen seine Anfangsbeschleunigung  $\ddot{\gamma}_{\gamma(t_0)} = (D\dot{\gamma})_{\gamma(t_0)}$ .

Nun wollen wir es nicht bei einem Punktteilchen belassen.

**Konzept 2.1.1 — Einfaches mechanisches System.** Ein einfaches mechanisches System ist eine festgelegte Anzahl von Partikeln bekannter Masse in einer Galilei-Raumzeit, deren Lagen und Geschwindigkeiten zu einer Anfangszeit gegeben sind.

Aber wie legen wir die Informationen über Lagen und Geschwindigkeiten eines einfachen mechanischen Systems ab? Welche mathematische Struktur fungiert als Speicher?

**Konzept 2.1.2 — Konfigurationsraum.** Gegeben sei ein einfaches mechanisches System mit  $n \in \mathbb{N}$  Partikeln. Die Anfangslagen und die kinematisch möglichen Lagen dieses Systems bilden eine offene Menge  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{3n}$ , die **Konfigurationsraum** oder auch **Ortsraum** des mechanischen Systems genannt wird. Unter der Anzahl der **Freiheitsgrade** eines mechanischen Systems verstehen wir die Dimension  $3n$  seines Konfigurationsraumes.

Und weiter:

**Konzept 2.1.3 — Phasenraum.** Gegeben sei ein einfaches mechanisches System mit  $n \in \mathbb{N}$  Partikeln und Konfigurationsraum  $\mathcal{Q}$ . Die Geschwindigkeitsvektoren (oder Tangentialvektoren) dieses Systems liegen in  $\mathbb{E}^n$ . Der Raum  $\mathbb{P} := \mathcal{Q} \times \mathbb{E}^n$  heißt **Phasenraum** des mechanischen Systems und gibt dessen kinematisch möglichen Zustände an. Der Phasenraum läßt sich auch als Tangentialbündel  $T\mathcal{Q}$  zum Konfigurationsraum  $\mathcal{Q}$  auffassen.

Ein Punkt im Phasenraum wird somit als kinematisch möglicher Zustand eines mechanischen Systems begriffen. Der Phasenraum fungiert in eleganter Weise als Speicher von solchen Zuständen, quasi als Informationsspeicher. Ein Zustand  $\Psi = (q, v) \in \mathbb{P}$  beschreibt das mechanische System dabei nicht nur im engen Sinne des Prinzips der Bestimmtheit, sondern erlaubt auch bei bekannten Anfangsbedingungen die Bestimmung aller Beobachtungsgrößen zu jedem Zeitpunkt. Damit charakterisiert  $\Psi$  das mechanische System vollständig und der Phasenraum speichert in diesem Sinne sehr platzsparend die gesamte existierende Information über das mechanische System ohne jedwede Einschränkung. Dies impliziert, daß  $\Psi$  die Konstruktion und Berechnung jeder Beobachtungsgröße erlauben muß. Mit anderen Worten, Beobachtungsgrößen der klassischen Mechanik sind Funktionen der Lagen und Geschwindigkeiten des betrachteten mechanischen Systems. Natürlich fordern wir weiter, daß Beobachtungsgrößen durch reellwertige Funktionen beschrieben werden. Außerdem erlauben wir einen (beliebig kleinen) Fehler bei der Messung einer Beobachtungsgröße. Lassen Sie uns in einem Gedankenexperiment  $\mathcal{B} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem Fehler kleiner als  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  messen. Wir setzen voraus, daß wir den Fehler bei der Bestimmung der Lagen und Geschwindigkeiten beliebig klein machen können, sagen wir der maximale Fehler ist  $0 < \delta \in \mathbb{R}$  so, daß wenn wir die gemessenen Lagen und Geschwindigkeiten in  $\mathcal{B}$  einsetzen, der Meßfehler in  $\mathcal{B}$  tatsächlich kleiner ist als  $\varepsilon$ . Dann können wir aussagen, daß wir  $\mathcal{B}$  zufriedenstellend gemessen haben im Rahmen der experimentell gesetzten Meßgenauigkeit. Hierbei handelt es sich aber um nichts anderes als das Konzept einer auf  $\mathbb{P}$  stetigen Funktion. Daher:

**Konzept 2.1.4 — Beobachtungsgröße.** Die (formalen) Beobachtungsgrößen eines mechanischen Systems sind gerade die stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem

### Phasenraum des Systems.

Die Qualifikation *formal* bezieht sich hier darauf, daß obiges Konzept eine notwendige aber eben keine hinreichende Charakterisierung von Beobachtungsgrößen gibt. Zu einer Beobachtungsgröße (ohne weitere Qualifikation) gehört natürlich auch eine Meßvorschrift. Aber dieser Umstand ist hier eher ein barocker und wir beachten ihn im Moment nicht weiter, sondern fahren geschwind fort:

**Konzept 2.1.5** Die Menge aller Beobachtungsgrößen auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems bezeichnen wir mit  $\mathfrak{D} := \mathcal{C}^0(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ .

Jetzt addieren wir Struktur. Wir nehmen im folgenden an, daß der einem mechanischen System kinematisch zugängliche Bereich im Phasenraum kompakt ist. Dies bedeutet keine allzu große Einschränkung, da die Lagen und Geschwindigkeiten eines mechanischen Systems allzeit beschränkt sind, wenn die Systemevolution vollständig ist. Zunächst einmal stellen wir fest:

**Aussage 2.1.1** Die Menge aller Beobachtungsgrößen eines mechanischen Systems ist ein Vektorraum über dem reellen Zahlenkörper.

**Begründung:** Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$  gilt wegen der Körperaxiome  $(\alpha\beta)\mathcal{A}(\Psi) = \alpha(\beta\mathcal{A}(\Psi))$  für alle  $\Psi \in \mathbb{P}$ , da  $\mathcal{A}(\Psi) \in \mathbb{R}$ . Hieraus folgt, daß die Zuordnung (Multiplikation)  $\mathbb{R} \times \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  assoziativ ist. Mit den Körperaxiomen folgt weiterhin  $\alpha(\mathcal{A}(\Psi) + \mathcal{B}(\Psi)) = \alpha\mathcal{A}(\Psi) + \alpha\mathcal{B}(\Psi)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ ) für alle  $\Psi \in \mathbb{P}$ , und  $(\alpha + \beta)\mathcal{A}(\Psi) = \alpha\mathcal{A}(\Psi) + \beta\mathcal{A}(\Psi)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathcal{A} \in \mathfrak{D}$ ) für alle  $\Psi \in \mathbb{P}$ . Somit ist die Multiplikation auch distributiv. Schließlich ist wegen der Körperaxiome  $1\mathcal{A}(\Psi) = \mathcal{A}(\Psi)$  ( $1 \in \mathbb{R}, \mathcal{A} \in \mathfrak{D}$ ) für alle  $\Psi \in \mathbb{P}$ . ■

Damit nicht genug. Der Vektorraum  $\mathfrak{D}$  kann mit einer Multiplikation  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  ausgestattet werden. Wir definieren  $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\Psi) := \mathcal{A}(\Psi)\mathcal{B}(\Psi)$  ( $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ ) für alle  $\Psi \in \mathbb{P}$ . Auf der linken Seite steht das Produkt in  $\mathfrak{D}$ , auf der rechten das Produkt in  $\mathbb{R}$ . Wir verzichten darauf, diese Produkte notationstechnisch zu unterscheiden, da im Zusammenhang immer klar wird, welches gemeint ist.

**Aussage 2.1.2** Es gelten

- (1)  $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$ ,
  - (2)  $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$ ,
  - (3)  $\alpha\beta(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A})(\beta\mathcal{B})$ ,
- für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{D}$ .

**Begründung:** Sei Ihnen als intellektuelle Fingerübung empfohlen. ■

Mit anderen Worten, das Produkt in  $\mathfrak{D}$  ist assoziativ und distributiv. Somit

**Aussage 2.1.3** Die Menge aller Beobachtungsgrößen eines mechanischen Systems ist eine kommutative Algebra über dem reellen Zahlenkörper.

Kommutativ bedeutet, daß  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$  für alle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ . Dies folgt unmittelbar aus der Definition und der Multiplikationsregel von Beobachtungsgrößen. Die Forderung, daß der verwendete Zahlenkörper  $\mathbb{R}$  ist, macht die gesamte Konstruktion etwas banal. In der

Quantenmechanik wird es interessanter, denn dann verwenden wir  $\mathbb{C}$ .

Schließlich definieren wir eine selbstinverse Abbildung  $\mathcal{A} \in \mathfrak{D} \rightarrow \mathcal{A}^* \in \mathfrak{D}$ , auch Involution genannt, durch  $\mathcal{A}^*(\Psi) := \overline{\mathcal{A}(\Psi)}$ . In unserem Fall gilt natürlich  $\overline{\mathcal{A}(\Psi)} = \mathcal{A}(\Psi)$ , da  $\mathcal{A}$  ja eine klassische Beobachtungsgröße ist. Die Involution hat folgende Eigenschaften:

**Aussage 2.1.4** Es gelten

- (1)  $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$ ,
  - (2)  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ ,
  - (3)  $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*$ ,
- für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ .

**Begründung:** Sei  $\Psi \in \mathbb{P}$  ein beliebiger Zustand im Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems. Es gilt drei Aussagen zu begründen:

- (1) Es ist  $\mathcal{A}^*(\Psi) = \overline{\mathcal{A}(\Psi)} = \mathcal{A}(\Psi)$ , und somit  $\mathcal{A}^{**}(\Psi) = \mathcal{A}^*(\Psi) = \mathcal{A}(\Psi)$ . Daraus folgt die Aussage.
- (2) Nach Definition und weil  $\mathfrak{D}$  eine kommutative Algebra ist, gilt  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*(\Psi) = \overline{(\mathcal{A}\mathcal{B})(\Psi)} = \overline{\mathcal{A}(\Psi)\mathcal{B}(\Psi)} = \overline{\mathcal{B}(\Psi)\mathcal{A}(\Psi)} = \overline{\mathcal{B}(\Psi)}\overline{\mathcal{A}(\Psi)} = \mathcal{B}^*(\Psi)\mathcal{A}^*(\Psi)$ , woraus sich die Aussage ergibt.
- (3)  $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^*(\Psi) = \overline{(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})(\Psi)} = \overline{\alpha\mathcal{A}(\Psi) + \beta\mathcal{B}(\Psi)} = \overline{\alpha\mathcal{A}(\Psi)} + \overline{\beta\mathcal{B}(\Psi)} = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*(\Psi) + \overline{\beta}\mathcal{B}^*(\Psi)$ , weil  $\mathfrak{D}$  ein Vektorraum und die komplexe Konjugation ein involutorischer Körperautomorphismus ist.

Damit sind die drei Eigenschaften der Involution für unseren Falls durch direktes Rechnen explizit nachgewiesen. ■

Die kommutative Algebra  $\mathfrak{D}$  wird zu einer normierten Algebra, falls mit jeder Beobachtungsgröße  $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$  eine reelle Zahl  $\|\mathcal{A}\|$  assoziiert ist, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (1)  $\|\mathcal{A}\| \geq 0$  und  $\|\mathcal{A}\| = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{A} = 0$ ,
- (2)  $\|\alpha\mathcal{A}\| = |\alpha|_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}\|$ ,
- (3)  $\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$ ,
- (4)  $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\|$ ,

für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$ , wobei der Zahlenkörper in unserem Fall  $\mathbb{R}$  ist, und Beobachtungsgrößen  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ . Die dritte Eigenschaft heißt Dreiecksungleichung und die letzte Produktungleichung.

**Aussage 2.1.5** Die kommutative Algebra der Beobachtungsgrößen eines einfachen mechanischen Systems ist eine normierte Algebra.

**Begründung:** Wir setzen  $\|\mathcal{A}\| := \text{Sup}\{|\mathcal{A}(\Psi)|_{\mathbb{R}} : \Psi \in \mathbb{P}\}$ .

- (1) Folgt aus den Eigenschaften der (reellen) Betragsfunktion.
- (2) Ebenso.
- (3) Ebenso.
- (4) Zunächst ist nach Definition  $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| = \text{Sup}\{|\mathcal{A}\mathcal{B}(\Psi)|_{\mathbb{R}} : \Psi \in \mathbb{P}\}$  und weiter

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathcal{B}\| &= \text{Sup}\{|\mathcal{A}(\Psi)|_{\mathbb{R}} |\mathcal{B}(\Psi)|_{\mathbb{R}} : \Psi \in \mathbb{P}\} \leq \\ &\leq \text{Sup}\{|\mathcal{A}(\Phi)|_{\mathbb{R}} : \Phi \in \mathbb{P}\} \text{Sup}\{|\mathcal{B}(\Psi)|_{\mathbb{R}} : \Psi \in \mathbb{P}\} = \\ &= \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\|. \end{aligned} \tag{2.1}$$



Fühlen Sie sich dazu ermuntert, die recht großen Lücken in der Begründung der vier Aussagen auszufüllen. ■

Wir wissen bereits, daß eine Norm eine Metrik induziert. Bezüglich dieser Metrik können eine Topologie auf  $\mathfrak{D}$  erzeugen. In dieser Topologie ist eine Umgebung einer Beobachtungsgröße  $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$  durch

$$\mathfrak{U}(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{B} \in \mathfrak{D} : \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| < \varepsilon \} \quad (2.2)$$

gegeben, wobei  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ . Damit läßt sich nun die Vollständigkeitsfrage stellen. Ist  $(\mathfrak{O})$  bezüglich dieser Topologie vollständig, so heißt  $\mathfrak{D}$  eine **Banach–Algebra**. Eine normierte Algebra mit einer Involution (selbstinversen Abbildung), die vollständig bezüglich der durch die Norm induzierten Topologie ist, und die Eigenschaft  $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}^*\|$  für alle ihre Element hat, heißt eine **Banach\*–Algebra**.

**Konzept 2.1.6 — C\*–Algebra.** Eine Banach\*–Algebra  $\mathfrak{A}$  mit der Eigenschaft

$$\|\mathcal{A}^* \mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}\|^2, \quad (2.3)$$

für jedes  $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ , heißt eine C\*–Algebra.

Beachten Sie, daß diese Eigenschaft kombiniert mit der Produkt-Ungleichung die Bedingung  $\|A\| = \|A^*\|$  impliziert, denn  $\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{A}^* \mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{A}^*\| \|\mathcal{A}\|$ , und damit ist  $\|\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{A}^*\|$ . Weiterhin folgt wegen der Involutionseigenschaft  $\|\mathcal{A}^*\|^2 = \|\mathcal{A}^* \mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{A}^*\| \|\mathcal{A}\|$ , weswegen auch  $\|\mathcal{A}^*\| \leq \|\mathcal{A}\|$  gilt. Insgesamt ergibt sich  $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}^*\|$ .

Endlich sind wir bei der vollen Struktur der Algebra von Beobachtungsgrößen mechanischer Systeme angekommen:

**Aussage 2.1.6** Die Menge der Beobachtungsgrößen eines mechanischen Systems mit kompakten Phasenraum ist eine C\*–Algebra.

**Begründung:** Wir begnügen uns hier damit, die im Konzept einer C\*–Algebra geforderte Normidentität nachzuweisen. Sei  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$  eine beliebige Beobachtungsgröße eines mechanischen Systems mit kompakten Phasenraum  $\mathbb{P}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^* \mathcal{B}\| &= \text{Sup} \{ | \mathcal{B}^*(\Psi) \mathcal{B}(\Psi) | : \Psi \in \mathbb{P} \} = \text{Sup} \{ | \mathcal{B}(\Psi) |^2 : \Psi \in \mathbb{P} \} = \\ &= \text{Sup} \{ | \mathcal{B}(\Psi) | : \Psi \in \mathbb{P} \} \text{Sup} \{ | \mathcal{B}(\Psi) | : \Psi \in \mathbb{P} \} = \|\mathcal{B}\|^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Es bleibt Ihnen als intellektuelle Fingerübung überlassen, die Vollständigkeit von  $\mathfrak{D}$  bezüglich der Normtopologie nachzuweisen. ■

Für den Fall eines kompakten Phasenraums (und nur dann), besitzt die C\*–Algebra  $\mathfrak{D}$  der Beobachtungsgrößen genau ein Einselement, welches wir mit  $\mathcal{E}$  notieren. Für dieses Element gilt  $\mathcal{B} = \mathcal{E} \mathcal{B} = \mathcal{B} \mathcal{E}$  für alle  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ . Wegen der Involution ist aber auch  $\mathcal{E}^*$  ein Einselement. Unsere Aussage ist aber, daß  $\mathfrak{D}$  genau ein Einselement besitzen kann, denn wäre  $\mathcal{E}'$  ein weiteres Einselement, dann gälte  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \mathcal{E}' = \mathcal{E}$ . Beachten Sie, daß  $\|\mathcal{E}\| = \|\mathcal{E}^* \mathcal{E}\| = \|\mathcal{E}\|^2$ . Weiterhin gilt mit der Produkt-Ungleichung  $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{E} \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{E}\| \|\mathcal{B}\|$ . Diese beiden Beziehungen implizieren  $\|\mathcal{E}\| \in \{0, 1\}$ . Allerdings folgte aus  $\|\mathcal{E}\| = 0$ , daß  $\|\mathcal{B}\| = 0$  für alle  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$  wegen der Positivität der Norm, und  $\mathfrak{D}$  wäre dann identisch Null. Diese triviale Möglichkeit wollen wir immer ignorieren und annehmen, daß  $\|\mathcal{E}\| = 1$ .

Wir sind auf eine für unsere Vorhaben recht üppige Struktur gestoßen, die uns auch einiges abverlangen mag. Diese Struktur wird sich aber im weiteren Aufbau der Theoretischen Physik, also der Königin der Naturwissenschaften, als überaus potent erweisen und uns immer wieder begegnen, jedenfalls wenn unsere Gedanken in eine moderne Richtung entweder weisen oder gewiesen werden.

Jedenfalls haben wir mit der Aussage 2.1.6 Beobachtungsgrößen mechanischer Systeme mit kompakten Phasenräumen vollständig charakterisiert. Kehren wir zu den Zuständen zurück. Vorausschauend reformulieren wir den mechanischen Zustandsbegriff (Punkt im Phasenraum) mittels (linearer) Funktionale auf der  $C^*$ -Algebra der Beobachtungsgrößen. Die Konzeption ist eine natürliche:

**Konzept 2.1.7 — Zustandsbegriff.** Sei  $\mathbb{P}$  der kompakte Phasenraum eines mechanischen Systems und  $\mathfrak{D}$  die zugehörige  $C^*$ -Algebra seiner Beobachtungsgrößen. Für einen beliebigen Phasenraumpunkt  $\Psi \in \mathbb{P}$  heißt die Abbildung  $Z_\Psi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $Z_\Psi(\mathcal{B}) := \mathcal{B}(\Psi)$ , für alle Beobachtungsgrößen  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ , das mit dem Phasenraumpunkt  $\Psi$  assoziierte **Zustandsfunktional**.

**Aussage 2.1.7** Sei  $\Psi \in \mathbb{P}$  ein beliebiger Punkt im kompakten Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems. Dann ist das mit diesem Punkt assoziierte Zustandsfunktional  $Z_\Psi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ein normiertes, positives lineares Funktional auf der  $C^*$ -Algebra  $\mathfrak{D}$  der Beobachtungsgrößen des mechanischen Systems.

**Begründung:** Weil  $\mathfrak{D}$  ein Vektorraum ist, folgt definitionsgemäß  $Z_\Psi(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})(\Psi) = \alpha\mathcal{A}(\Psi) + \beta\mathcal{B}(\Psi)$ , und andererseits  $\alpha Z_\Psi(\mathcal{A}) + \beta Z_\Psi(\mathcal{B}) = \alpha\mathcal{A}(\Psi) + \beta\mathcal{B}(\Psi)$ , also  $Z_\Psi(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = \alpha Z_\Psi(\mathcal{A}) + \beta Z_\Psi(\mathcal{B})$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ . Somit ist  $Z_\Psi$  ein lineares Funktional. Mit der üblichen Supremumsnorm für lineare Funktionale,  $\|Z_\Psi\| := \text{Sup}\{|Z_\Psi(\mathcal{A})|_{\mathbb{R}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{D} \text{ mit } \|\mathcal{A}\| = 1\}$ , folgt weiter  $\|Z_\Psi\| \geq |Z_\Psi(\mathcal{E})|_{\mathbb{R}} = 1$ , denn  $\mathcal{E}$  ist ja das Einselement der  $C^*$ -Algebra  $\mathfrak{D}$ . Nun ist aber definitionsgemäß  $|Z_\Psi(\mathcal{A})|_{\mathbb{R}} = |\mathcal{A}(\Psi)|_{\mathbb{R}} \leq \text{Sup}\{|\mathcal{A}(\Phi)|_{\mathbb{R}} : \Phi \in \mathbb{P}\} = \|\mathcal{A}\|$ . Also ist  $|Z_\Psi(\mathcal{A})|_{\mathbb{R}} \leq 1$  für alle  $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$  mit  $\|\mathcal{A}\| = 1$ , und daher  $\|Z_\Psi\| \leq 1$ . Somit gilt  $\|Z_\Psi\| = 1$  und damit ist das Zustandsfunktional normiert. Positivität begründen wir hier nicht. ■

Damit ist auch der mechanische Zustandsbegriff vollständig charakterisiert.

Lassen Sie uns noch einen Ausflug in die Experimentalphysik machen und skizzieren, welche Eigenschaft unsere Zustandsfunktionale in einer Meßreihe zeigen. Dazu bedarf es einiger konzeptioneller Vorarbeit, die sich aber auch im Hinblick auf eine moderne Quantenmechanik lohnt. Uns interessiert hier, was Messen eigentlich meint.

**Konzept 2.1.8 — Mengenring.** Sei  $X$  eine Menge. Eine nichtleere Familie  $\mathcal{R}$  von Teilmengen von  $X$  heißt ein **Mengenring**, wenn aus  $A, B \in \mathcal{R}$  folgt  $A \cup B \in \mathcal{R}$  und  $A/B = A \cap (X/B) \in \mathcal{R}$ .

Unmittelbare Einsichten sind, daß dann auch  $A \cap B \in \mathcal{R}$ , denn  $A \cap B = A/(A/B)$ , und, weil  $\mathcal{R}$  nach Voraussetzung nichtleer ist, also stets ein  $A \in \mathcal{R}$  existiert, ist auch die leere Menge  $\emptyset = A/A \in \mathcal{R}$ .

**Konzept 2.1.9 — Prämaß.** Sei  $\mathcal{R}$  ein Mengerring in  $X$ . Eine Funktion  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$  heißt **Prämaß** auf  $(X, \mathcal{R})$ , wenn sie  $\sigma$ -additiv ist, das heißt, wenn gilt: Aus  $A_n \in \mathcal{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $A_n \cap A_m = \emptyset$  für  $n \neq m \in \mathbb{N}$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$  folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \quad (2.5)$$

Insbesondere ergibt sich  $\mu(\emptyset) = 0$  und  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  für  $A, B \in \mathcal{R}$  mit  $A \cap B = \emptyset$ .

**Konzept 2.1.10 —  $\mu$ -Nullmenge.** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $(X, \mathcal{R})$ . Eine Teilmenge  $N$  von  $X$  heißt  $\mu$ -**Nullmenge**, wenn für jedes  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Mengerring  $\mathcal{R}$  existiert, mit

$$N \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Wir sagen, daß eine Aussage  $\mu$ -fast überall in  $X$  gilt ( $\mu$ -f.ü. in  $X$ ), oder für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$  ( $\mu$ -f.a.  $x \in X$ ), wenn eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  existiert so, daß die Aussage für alle  $x \in X/N$  gilt.

**Konzept 2.1.11 — Elementarfunktionen.** Sei  $\mathcal{R}$  ein Mengerring in  $X$ . Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine  $\mathcal{R}$ -**Elementarfunktion**, wenn endlich viele disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$  existieren so, daß

$$f(x) = \sum_{j \in \mathcal{I}(n)} r_j \chi_{A_j}(x). \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet  $\chi_A$  die Indikatorfunktion der Menge  $A$ . Die Menge der Elementarfunktionen bilden einen reellen Vektorraum  $E(X, \mathcal{R})$ . Elementarfunktionen lassen sich mithilfe von Prämaßen anschaulich integrieren:

**Konzept 2.1.12 —  $\mu$ -Integral.** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $(X, \mathcal{R})$  und  $f$  eine  $\mathcal{R}$ -Elementarfunktion. Dann ist das  $\mu$ -**Integral** von  $f$  definiert durch

$$\int d\mu f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathcal{I}(n)} r_j \mu(A_j). \quad (2.8)$$

Die Abbildung, die jeder Elementarfunktion aus  $E(X, \mathcal{R})$  ihr  $\mu$ -Integral zuweist ist offenbar linear und auch positiv. Es gilt außerdem

$$\left| \int d\mu f \right| = \left| \sum_{j \in \mathcal{I}(n)} \mu(A_j) r_j \right| \leq \sum_{j \in \mathcal{I}(n)} \mu(A_j) |r_j|, \\ \int d\mu |f + g| \leq \int d\mu (|f| + |g|) \quad (2.9)$$

für alle  $f, g \in E(X, \mathcal{R})$ . Damit definiert

$$\|f\|_1 \stackrel{\text{df}}{=} \int d\mu(x) |f(x)| \quad (2.10)$$

eine Halbnorm auf  $E(X, \mathcal{R})$ . Diese ist ungemein nützlich, weil wir ja nicht bloß Elementarfunktionen integrieren wollen:

**Konzept 2.1.13 —  $\mu$ -integrierbar.** Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $\mu$ -**integrierbar**, wenn eine  $\|\cdot\|_1$ -Cauchyfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E(X, \mathcal{R})$  mit  $f_n(x) \rightarrow f(x)$   $\mu$ -fast überall in  $X$  existiert. In diesem Falle ist das  $\mu$ -Integral von  $f$  definiert durch

$$\int d\mu(x) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\mu(x) f_n(x). \quad (2.11)$$

Die Menge aller  $\mu$ -integrierbaren Funktionen auf  $X$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ . Offenbar ist  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$  ein reeller Vektorraum und  $\|\cdot\|_1$  ist eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ . Beachten Sie, daß dies im allgemeinen keine Norm ist, da für alle  $f$  mit  $f(x)=0$   $\mu$ -fast überall in  $X$  bereits  $\|f\|_1 = 0$  gilt, obwohl  $f$  nicht identisch verschwindet, denn dann wäre ja  $f(x) = 0$  überall in  $X$ .

Sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $(X, \mathcal{R})$ . Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß  $X$   $\sigma$ -endlich ist, das heißt es existiert eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}$  mit  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ . Dann heißt eine **Funktion**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -**meßbar**, wenn eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E(X, \mathcal{R})$  existiert mit  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -fast überall in  $X$ . Eine **Teilmenge**  $A \subset X$  heißt  $\mu$ -**meßbar**, wenn die Indikatorfunktion  $\chi_A$   $\mu$ -meßbar ist. Das Prämaß  $\mu$  wird nun, bei Beibehaltung der Notation, fortgesetzt auf die Familie der  $\mu$ -meßbaren Mengen, indem wir definieren:

$$\mu(A) = \begin{cases} \int d\mu \chi_A, & \text{falls } \chi_A \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \\ \infty, & \text{falls } \chi_A \notin \mathcal{L}^1(X, \mu) \end{cases}. \quad (2.12)$$

**Konzept 2.1.14 —  $\sigma$ -Algebra.** Eine Familie  $\Omega$  von Teilmengen von  $X$  heißt eine  $\sigma$ -**Algebra** in  $X$ , wenn gilt  $\emptyset \in \Omega$ ,  $A \in \Omega$  impliziert  $X/A \in \Omega$ , und  $A_n \in \Omega$  für  $n \in \mathbb{N}$  impliziert  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Omega$ .

**Konzept 2.1.15 — Maß.** Sei  $\Omega$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ . Eine Abbildung  $\mu : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  heißt ein **Maß** auf  $(X, \Omega)$ , wenn gilt: Aus  $A_n \in \Omega$  mit  $A_n \cap A_m = \emptyset$  für  $n, m \in \mathbb{N} : m \neq n$  folgt

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n), \quad (2.13)$$

dies heißt, daß  $\mu$   $\sigma$ -**additiv** ist. Das geordnete Tripel  $(X, \Omega, \mu)$  heißt ein **Maßraum**.

Für statistische Aussagen (zum Beispiel Fehlerrechnung in der Experimentalphysik, aber auch Datenanalyse in rein beobachtungsorientierten Gebieten) interessieren uns insbesondere Wahrscheinlichkeitsmaße.

**Konzept 2.1.16 — Wahrscheinlichkeitsmaß.** Ist  $(X, \Omega, \mu)$  ein Maßraum mit  $\mu(X) = 1$ , so heißt  $\mu$  ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

Die für die Maßtheorie wichtigste  $\sigma$ -Algebra ist die  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Teilmengen des  $\mathbb{R}^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

**Konzept 2.1.17 — Borelsche Teilmengen.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $T$  das System der offenen Teilmengen von  $X$ . Dann heißt die von  $T$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(T)$  die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(X)$  der **Borelschen Teilmengen** von  $X$ .

Wir können nun eine weitere Perspektive auf mechanische Zustandsfunktionale genießen. Ein Theorem von Riesz und Markov charakterisiert diese Zustände sehr schön maßtheoretisch:

**Aussage 2.1.8** Sei  $\mathbb{P}$  der lokal kompakte Phasenraum eines mechanischen Systems, in dem das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt, und  $\mathfrak{D} = C^0(\mathbb{P}, \mathbb{R})$  die  $C^*$ -Algebra der zugehörigen Beobachtungsgrößen. Weiterhin sei  $Z_\Psi$  ( $\Psi \in \mathbb{P}$ ) ein Zustandsfunktional auf  $\mathfrak{D}$ . Dann gibt es genau ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{Z_\Psi}$  auf  $\mathbb{P}$  so, daß

$$Z_\Psi(\mathcal{B}) = \int_{\mathbb{P}} d\mu_{Z_\Psi} \mathcal{B} \quad (2.14)$$

für alle  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ .

**Begründung:** Wir müssen hier leider auf eine ausführliche Begründung verzichten und unser intellektuelles Augenmerk stattdessen darauf fokussieren, wie das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{Z_\Psi}$  aus dem Zustandsfunktional (re)konstruiert werden kann.

Wir setzen voraus, daß  $\mu_{Z_\Psi}$  regulär ist (in der ursprünglichen Formulierung der Aussage nach Riesz und Markov werden sogenannte Bairesche Maße verwendet, die eineindeutig zu regulären Borelschen Maßen korrespondieren), das heißt für  $Y \subset \mathbb{P}$  gilt

$$\begin{aligned} \mu_{Z_\Psi}(Y) &= \text{Inf} \{ \mu(O) : Y \subset O, O \text{ offen} \} \\ &= \text{Sup} \{ \mu(K) : K \subset Y, K \text{ kompakt und Borel} \}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für die Maßrekonstruktion können wir uns also auf kompakte Borelsche Teilmengen von  $\mathbb{P}$  konzentrieren. Da  $\mu_{Z_\Psi}$  ein positives Maß ist, gilt  $\mu_{Z_\Psi}(K) \leq Z_\Psi(\mathcal{B})$  für alle Beobachtungsgrößen  $\mathcal{B} \geq \chi_K$ . Wegen der Regularität des Borelschen Maßes gibt es zu jedem  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  eine offene Teilmenge  $O$  mit  $K \subset O$  und  $\mu_{Z_\Psi}(O/K) < \varepsilon$ . Mit dem Lemma von Urysohn folgt, daß wir immer eine Beobachtungsgröße  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$  finden können so, daß  $0 \leq \mathcal{B} \leq 1$  mit  $\mathcal{B}(\Psi) = 1$  falls  $\Psi \in K$  und  $\mathcal{B}(\Psi) = 0$  falls  $\Psi \in \mathbb{P}/O$ . Damit gilt  $Z_\Psi(\mathcal{B}) \leq \mu_{Z_\Psi}(O) < \mu_{Z_\Psi}(K) + \varepsilon$ . Andererseits fanden wir ja weiter oben  $\mu_{Z_\Psi}(K) \leq Z_\Psi(\mathcal{B})$ . Insgesamt ergibt sich  $\mu_{Z_\Psi}(K) \leq Z_\Psi(\mathcal{B}) < \mu_{Z_\Psi}(K) + \varepsilon$  für jedes  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Deswegen ist es nicht sehr überraschend, daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß von einem Zustandsfunktional konstruiert werden kann. ■

Wir kommen nun zur physikalischen Interpretation dieser Korrespondenz zwischen einem mechanischen Zustandsfunktional und einem Wahrscheinlichkeitsmaß. Es macht wohl Sinn,  $Z_\Psi(\mathcal{B})$  als Erwartungswert der Beobachtungsgröße  $\mathcal{B}$  im Zustand  $Z_\Psi$  zu interpretieren. Dieser Intuition folgend ist folgendes sinnvoll:

**Konzept 2.1.18 — Mittlere Quadratische Abweichung.** Sei  $Z_\Psi$  ( $\Psi \in \mathbb{P}$ ) das Zustandsfunktional eines mechanischen System mit Phasenraum  $\mathbb{P}$  und  $\mathcal{B} \in \mathfrak{D}$  eine Beobachtungsgröße in der  $C^*$ -Algebra  $C^0(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ . Dann heißt

$$\text{MQA}_{Z_\Psi}(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} Z_\Psi \left( (\mathcal{B} - Z_\Psi(\mathcal{B}))^2 \right) \quad (2.16)$$

**mittlere quadratische Abweichung** der Beobachtungsgröße  $\mathcal{B}$  im mechanischen Zu-

stand mit Zustandsfunktional  $Z_\Psi$ .

**Aussage 2.1.9** Die mittlere quadratische Abweichung jeder Beobachtungsgröße verschwindet in jedem mechanischen Zustand.

**Begründung:** Für eine beliebige Beobachtungsgröße  $\mathcal{B}$  in der  $C^*$ -Algebra  $\mathfrak{D} = C^0(\mathbb{P}, \mathbb{R})$  der Beobachtungsgrößen gilt wegen der Multiplikationsregel  $(\mathcal{B}\mathcal{B})(\Psi) = (\mathcal{B}(\Psi))^2$  für alle  $\Psi \in \mathbb{P}$ . Mit der Definition des linearen Zustandsfunktionals folgt dann  $\text{MQA}_{Z_\Psi}(\mathcal{B}) = Z_\Psi(\mathcal{B}\mathcal{B} - 2Z_\Psi(\mathcal{B})\mathcal{B} + (Z_\Psi(\mathcal{B}))^2) = Z_\Psi(\mathcal{B}\mathcal{B}) - (Z_\Psi(\mathcal{B}))^2 = (\mathcal{B}\mathcal{B})(\Psi) - (\mathcal{B}(\Psi))^2 = 0$ . Damit ist die Aussage begründet. ■

Wir haben eine weitere relevante Charakterisierung von mechanischen Zustandsfunktionalen, die in der Quantenmechanik einer fundamentalen und radikalen Revision unterzogen werden wird.

## 2.2 Dynamische Aspekte

Das Prinzip 2.1.1 der Bestimmtheit und seine Verschärfung implizieren, daß die Beschleunigung einer Punktmasse nur von seiner Lage, von seiner Geschwindigkeit und den Lagen und Geschwindigkeiten aller anderen Punktmassen in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ , sowie möglicherweise explizit von der Zeit abhängen kann, also

$$\dot{\gamma}_c = f_c \left( \{ \gamma_a \}_{a \in \mathcal{I}(n)}, \{ \dot{\gamma}_b \}_{b \in \mathcal{I}(n)}, t \right), \quad c \in \mathcal{I}(n) \quad (2.17)$$

für  $n \in \mathbb{N}$  Punktmassen in  $\mathcal{G}$ . Hierbei ist  $f_c : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n}) \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}$ .

Das Relativitätsprinzip von Galilei verlangt, daß die Beschleunigung der Punktmasse auf der Kurve  $\gamma_c$  eine Beobachtungsgröße ist, das heißt Beobachter in unterschiedlichen Bezugssystemen messen alle denselben Beschleunigungsvektor, aber nicht notwendigerweise dieselben Beschleunigungskomponenten. Unterschiedliche Bezugssysteme gehen auseinander mittels Galilei-Transformationen hervor. Folglich müssen sich Gleichungen zwischen Beobachtungsgrößen invariant unter der eigentlichen, orthochronen Galilei-Gruppe transformieren. Beachten Sie, daß dies nur der Spezialfall von linearen Koordinatentransformationen ist. Natürlich sind Beobachtungsgrößen in allen Koordinatensystemen dieselben, insbesondere auch in denen, die nur lokal über orthonormale Basen verfügen. Beziehungen zwischen Beobachtungsgrößen lassen sich aber besonders bequem in Inertialsystemen untersuchen, die über globale Orthonormalbasen verfügen. Auf solche Systeme eingeschränkt, reduziert sich die Gruppe der Koordinatenwechsel (Diffeomorphismengruppe) auf die eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe.

Wir studieren nun welche Einschränkungen die eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe  $\mathfrak{G}$  der rechten Seite von Gleichung (2.17) auferlegt. Da Zeittranslationen eine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  sind, muss sich die Beschleunigung unter dieser invariant transformieren. Dieser Situation entsprechen zwei Beobachter, deren Uhren einen festen Gangunterschied aufweisen. Folglich haben  $\gamma_c(t)$  und  $\gamma_c(t+s)$  für festes  $s \in \mathbb{R}$  und beliebiges  $c \in \mathcal{I}(n)$  zu allen Zeiten den gleichen Beschleunigungsvektor. Dies ist nur möglich, wenn die rechte Seite von Gleichung (2.17) explizit zeitunabhängig ist, also

$$\dot{\gamma}_c = f_{cT_s} \left( \{ \gamma_a \}_{a \in \mathcal{I}(n)}, \{ \dot{\gamma}_b \}_{b \in \mathcal{I}(n)} \right), \quad c \in \mathcal{I}(n). \quad (2.18)$$

Als nächstes analysieren wir das Verhalten von Gleichung (2.18) unter räumlichen Verschiebungen, die ebenfalls eine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  bilden. Zwei Beobachter, deren Labore gegeneinander im Raum fest verschoben sind, sollen trotzdem dieselbe Beschleunigung messen. Sagen wir, die Ursprünge beider Bezugssysteme seien um den zeitunabhängigen Verbindungsvektor  $r \in \mathbb{E}$  verschoben. Weil die Beschleunigung eine Beobachtungsgröße ist, muß dann für jedes  $c \in \mathcal{I}(n)$  gelten:

$$f_{c_{T_s}} \left( \{\gamma_a\}_{a \in \mathcal{I}(n)}, \{\dot{\gamma}_b\}_{b \in \mathcal{I}(n)} \right) = f_{c_{T_s}} \left( \{\gamma_a + r\}_{a \in \mathcal{I}(n)}, \{\dot{\gamma}_b\}_{b \in \mathcal{I}(n)} \right), \quad (2.19)$$

da  $r$  zeitunabhängig ist. Dies ist offenbar nur möglich, wenn die Beschleunigung lediglich von den relativen Lagen abhängt, also

$$\dot{\gamma}_c = f_{c_{T_s, r}} \left( \{\gamma_a - \gamma_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b}, \{\dot{\gamma}_d\}_{d \in \mathcal{I}(n)} \right) \quad (2.20)$$

für alle  $c \in \mathcal{I}(n)$ . Es bietet sich sogleich an, die Fragestellung auf Bezugssysteme auszuweiten, die sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit  $v$  relativ zueinander bewegen, also Bezugssysteme, die durch eine spezielle Galilei-Transformation auseinander hervorgehen. Zunächst bemerken wir, daß wegen der Gleichförmigkeit der Geschwindigkeit die Abhängigkeit von den Relativlagen in Gleichung (2.22) nicht von der Transformation tangiert wird. Weil die Beschleunigung eine Beobachtungsgröße ist, muß dann für alle  $c \in \mathcal{I}(n)$  folgendes gelten:

$$\begin{aligned} f_{c_{T_s, r}} \left( \{\gamma_a - \gamma_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b}, \{\dot{\gamma}_d\}_{d \in \mathcal{I}(n)} \right) &= \\ &= f_{c_{T_s, r}} \left( \{\gamma_a - \gamma_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b}, \{\dot{\gamma}_d + v\}_{d \in \mathcal{I}(n)} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

was offenbar nur möglich ist, wenn die Beschleunigung lediglich von Relativgeschwindigkeiten abhängt, also

$$\dot{\gamma}_c = f_{c_{T_s, r, G_v}} \left( \{\gamma_a - \gamma_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b}, \{\dot{\gamma}_a - \dot{\gamma}_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b} \right) \quad (2.22)$$

für alle  $c \in \mathcal{I}(n)$ . Es bleibt die Forderung nach Invarianz unter Drehungen zu untersuchen. Aus ihr ergibt sich, daß sich die rechte Seite von Gleichung (2.22) wie ein Galilei-Vektor beziehungsweise wie ein Galileisches Vektorfeld transformiert, in Übereinstimmung mit der linken Seite.

**Prinzip 2.2.1 — Newtonsche Bewegungsgleichung.** Die Bewegungen  $\Gamma_c : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  ( $c \in \mathcal{I}(n)$ ), definiert durch  $\Gamma_c(t) := (t, \gamma_c(t))$ , eines mechanischen Systems aus  $n \in \mathbb{N}$  Punktteilchen in der Galilei-Raumzeit  $\mathcal{G}$ , sind Lösungen der  $n$  **Newtonschen Bewegungsgleichungen**

$$m_c \dot{\gamma}_c = F_c \left( \{\gamma_a - \gamma_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b}, \{\dot{\gamma}_a - \dot{\gamma}_b\}_{a, b \in \mathcal{I}(n): a \neq b} \right) + F_c^{\text{ext}}(\gamma_c) \quad (2.23)$$

für alle  $c \in \mathcal{I}(n)$ . Hierbei heißt  $F_c$  die gesamte **Wechselwirkungskraft** zwischen dem Punktteilchen mit der Masse  $m_c$  und allen anderen Punktmassen, und  $F_c^{\text{ext}}$  heißt die auf dieses Punktteilchen wirkende **äußere Kraft**.

Äußere Kräfte verursachen Beschleunigungen, die aus unterschiedlichen Gründen nicht durch elementare Wechselwirkungen beschrieben werden, meistens, weil dies zu kompliziert wäre. Sie sind Kennzeichen einer nicht fundamentalen, sondern effektiven Naturbeschreibung, in der nicht alle Effekte in Form von Wechselwirkungen zwischen Punktteilchen aufgelöst werden.

Zum Wesen der Newtonschen Bewegungsgleichung läßt sich feststellen, daß sie im allgemeinen ein dynamisches Vektorfeld auf der Galilei-Raumzeit als gegeben voraussetzt, und dann fragt, welche Kurven in der Galilei-Raumzeit diese Beschleunigung aufweisen. Diese Kurven heißen dann **Bewegungen**.

Es stellt sich die Frage, was Newtons Formulierung der Dynamik mechanischer Systeme mit dem Konzept des mechanischen Zustandsfunctionals zu tun hat. Insbesondere taucht der Phasenraum in seiner Formulierung gar nicht auf. Der Zusammenhang wird durch folgende Aussage gestiftet:

**Aussage 2.2.1** Die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_c \ddot{\gamma}_c = F_c(\{\gamma_a - \gamma_b\}_*, \{\dot{\gamma}_a - \dot{\gamma}_b\}_*) + F_c^{\text{ext}}(\gamma_c), \quad c \in \mathcal{I}(n) \quad (2.24)$$

für ein mechanisches System mit  $n \in \mathbb{N}$  Punktteilchen der Massen  $m_c$  und Phasenraum  $\mathbb{P}$  sind zum System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_c &= f_c(\Psi), \quad \text{mit} \\ f_c(\Psi) &= \left( (\Psi_c)_2, \frac{F_c}{m_c}(\{(\Psi_a)_1 - (\Psi_b)_1\}_*) + \frac{F_c^{\text{ext}}}{m_c}((\Psi_c)_1) \right)^T \end{aligned} \quad (2.25)$$

im folgenden Sinn äquivalent:

- (1) Sind  $\varphi_c : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichungen (2.24), dann sind  $\psi_c := (\varphi_c, \dot{\varphi}_c)^T : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  Lösungen der Gleichungen (2.25).
- (2) Sind umgekehrt  $\psi_c = ((\psi_c)_1, (\psi_c)_2)^T$  Lösungen der Gleichungen (2.25), dann sind  $(\psi_c)_1$  Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichungen (2.24).

Hierbei bedeutet der Index  $\star$  an den geschweiften Klammern, daß alle Indizes durch die Indexmenge  $\mathcal{I}(n)$  laufen, wobei Paare von Indizes nie den gleichen Wert annehmen sollen.

**Begründung:** Nach Voraussetzung ist  $\varphi_c$  für jedes  $c \in \mathcal{I}(n)$  zweimal stetig differenzierbar, also ist  $\psi_c$  stetig differenzierbar, und es gilt  $(\psi_c)_2 = (\dot{\psi}_c)_1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\dot{\psi}_c)_2 = \ddot{\varphi} &= \\ &= \frac{F_c}{m_c}(\{(\psi_a)_1 - (\psi_b)_1\}_*, \{(\dot{\psi}_a)_2 - (\dot{\psi}_b)_2\}_*) + \frac{F_c^{\text{ext}}}{m_c}((\psi_c)_1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wir können die Argumentation unschwer umkehren, überlassen dies aber Ihren intellektuellen Fingerfertigkeiten. ■

### 2.2.1 Lokale Aussagen

Im folgenden sind wir etwas großzügiger und erlauben, daß  $f$  in Gleichung (2.25) explizit von der Zeit abhängen darf. Dies erlaubt lokale Existenz und Eindeutigkeitsfragen von



Lösungen auf allgemeinere Situationen auszuweiten. Außerdem kondensieren wir unsere Notation und fassen alle benötigten Begriffe in folgendem Konzept zusammen.

**Konzept 2.2.1 — Dynamisches System.** Sei  $\mathcal{P}$  der Phasenraum eines mechanischen Systems,  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{P}$  offen und  $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{P}$  stetig. Dann heißt  $\mathbb{U}$  **erweiterter Phasenraum**,  $f$  **zeitabhängiges Vektorfeld** und die Gleichung

$$\dot{\Psi} = f(t, \Psi) \quad (2.27)$$

**explizit zeitabhängige** Differentialgleichung.

Ist speziell  $f$  von der Gestalt  $f(t, \Psi) = \tilde{f}(\Psi)$ , so heißt die Differentialgleichung **autonom** oder **dynamisches System**.

Eine differenzierbare Funktion  $\varphi: \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  heißt **Lösung** der Differentialgleichung (2.27), wenn  $\text{graph}\varphi \subset \mathbb{U}$  und

$$\dot{\varphi}(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau)) \quad (2.28)$$

für beliebige  $\tau$  aus dem Zeitintervall  $\mathcal{I}$ .

Eine differenzierbare Funktion  $\varphi: \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  genügt der **Anfangsbedingung**  $(t_0, \Psi_0)$ , wenn  $t_0 \in \mathcal{I}$ ,  $(t_0, \Psi_0) \in \mathbb{U}$  und  $\varphi(t_0) = \Psi_0$ . Das **Anfangswertproblem** wird von  $\varphi$  gelöst, wenn folgendes gilt:

$$\dot{\varphi}(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau)), \quad (\tau \in \mathcal{I}) \quad \text{und} \quad \varphi(t_0) = \Psi_0. \quad (2.29)$$

Das zeitabhängige Vektorfeld  $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{P}$  erfüllt

(1) **global eine Lipschitz-Bedingung** mit konstantem  $L \in \mathbb{R}$ , wenn

$$\|f(t, \Psi_0) - f(t, \Psi_1)\|_{\mathbb{P}} \leq L \|\Psi_0 - \Psi_1\|_{\mathbb{P}} \quad ((t_1, \Psi_1) \in \mathbb{U}), \quad (2.30)$$

(2) **lokal eine Lipschitz-Bedingung**, wenn jeder Punkt  $(\tau, \Psi) \in \mathbb{U}$  eine Umgebung  $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$  so besitzt, daß für eine Konstante  $L(\tau, \Psi) \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\|f(t, \Psi_0) - f(t, \Psi_1)\|_{\mathbb{P}} \leq L(\tau, \Psi) \|\Psi_0 - \Psi_1\|_{\mathbb{P}} \quad ((t_1, \Psi_1) \in \mathbb{V}). \quad (2.31)$$

Beachten Sie, daß die Lipschitz-Stetigkeit nur bezüglich der  $\Psi$ -Variablen gefordert wird. Wir werden alsbald einsehen, daß die lokale Lipschitz-Bedingung nach der Aussage von Picard-Lindelöf bereits die Existenz und Eindeutigkeit einer temporal lokalen Lösung des Anfangswertproblems garantiert. Die bloße Existenz einer solchen Lösung folgt übrigens nach der Aussage von Peano bereits auf der Stetigkeit des Vektorfeldes  $f$ , allerdings reicht dies nicht um Eindeutigkeit zu garantieren. Es bedarf hier noch einer kleinen Aufklärung:

**Konzept 2.2.2 — Eindeutigkeit.** Das Anfangswertproblems (2.29) besitzt eine **eindeutige Lösung**, wenn für zwei Lösungen  $\varphi_1: \mathcal{I}_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  und  $\varphi_2: \mathcal{I}_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  des Anfangswertproblems auf dem Intervall  $\mathcal{I}_3 := \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  gilt:

$$\varphi_1|_{\mathcal{I}_3} = \varphi_2|_{\mathcal{I}_3}. \quad (2.32)$$

Die Begründung der Aussage von Picard-Lindelöf bedarf einiger Vorbereitung, die wir auch der Aussage selbst voranstellen.

**Aussage 2.2.2** Sei  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}$  abgeschlossen und  $\mathcal{K}$  der Raum der Kurven

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{df}}{=} \{ \gamma \in C^0(\mathcal{I}, \mathbb{V}) : \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma(t)\|_{\mathbb{P}} < \infty \} \quad (2.33)$$

mit

$$d(\gamma_1, \gamma_2) \stackrel{\text{df}}{=} \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}) . \quad (2.34)$$

Dann ist das Paar  $(\mathcal{K}, d)$  ein vollständiger metrischer Raum.

**Begründung:** Zunächst weisen wir nach, daß  $(\mathcal{K}, d)$  ein metrischer Raum ist. Für Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  in  $\mathcal{K}$  gilt:

(1) Aus der Definition ergibt sich unmittelbar aus der positiven Homogenität der Norm auf  $\mathbb{P}$ , daß  $d$  symmetrisch ist,  $d(\gamma_1, \gamma_2) = d(\gamma_2, \gamma_1)$ .

(2) Da  $\|\cdot\|_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$  folgt  $d : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$ , denn wegen der Dreiecksungleichung der Norm ist  $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}} \leq \|\gamma_1(t)\|_{\mathbb{P}} + \|\gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}}$ , und daher auch  $\text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}} \leq \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_1(t)\|_{\mathbb{P}} + \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}} < \infty$ . Weiterhin ist  $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}}$  genau dann Null, wenn  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ . Insgesamt ergibt sich hieraus die Positivität von  $d$ .

(3) Es bleibt die Dreiecksungleichung für  $d$  nachzuweisen:

$$\begin{aligned} d(\gamma_1, \gamma_3) &= \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t) + \gamma_2(t) - \gamma_3(t)\|_{\mathbb{P}} \\ &\leq \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_{\mathbb{P}} + \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \|\gamma_2(t) - \gamma_3(t)\|_{\mathbb{P}} \\ &= d(\gamma_1, \gamma_2) + d(\gamma_2, \gamma_3) , \end{aligned} \quad (2.35)$$

wobei wir außer der Definition von  $d$  die Dreiecksungleichung für die Norm auf dem Phasenraum benutzt haben.

Wir untersuchen nun, ob der metrische Raum  $(\mathcal{K}, d)$  vollständig ist. Sei  $(\gamma_a)_{a \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(\mathcal{K}, d)$ . Für alle  $t \in \mathcal{I}$  ist  $\|\gamma_a(t) - \gamma_b(t)\|_{\mathbb{P}} \leq d(\gamma_a, \gamma_b)$ . Nun wählen wir ein beliebiges  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ . Nach Voraussetzung gibt es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, daß  $d(\gamma_a, \gamma_b) < \varepsilon$  für alle  $a, b \in \mathbb{N} : a, b \geq N_\varepsilon$ . Dann ist auch  $\|\gamma_a(t) - \gamma_b(t)\|_{\mathbb{P}} < \varepsilon$  für alle  $a, b \geq N_\varepsilon$ . Also ist  $(\gamma_a(t))_{a \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}$ . Als abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{P}$  ist  $\mathbb{V}$  aber vollständig. Folglich konvergiert  $(\gamma_a(t))_{a \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{V}$  punktweise gegen eine Kurve  $\gamma : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ .

Aber ist  $\gamma$  stetig und sogar in  $\mathcal{K}$ ? Für  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  sei  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so gewählt, daß  $d(\gamma_a, \gamma_{N_\varepsilon}) < \varepsilon/3$  für alle  $N_\varepsilon \leq a \in \mathbb{N}$ . Somit gilt auf für alle  $t \in \mathcal{I}$ , daß  $\|\gamma - \gamma_{N_\varepsilon}\|_{\mathbb{P}} \leq \varepsilon/3$ . Aus der Stetigkeit von  $\gamma_{N_\varepsilon}$  folgt für alle  $s \in \mathcal{I}$  die Existenz eines  $0 < \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit

$$\|\gamma_{N_\varepsilon}(t) - \gamma_{N_\varepsilon}(s)\|_{\mathbb{P}} < \varepsilon/3 \quad , \quad t \in \mathcal{I} : |t - s|_{\mathbb{R}} < \delta_\varepsilon . \quad (2.36)$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung für die Norm auf dem Phasenraum

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(s)\|_{\mathbb{P}} &\leq \\ \|\gamma(t) - \gamma_{N_\varepsilon}(t)\|_{\mathbb{P}} + \|\gamma_{N_\varepsilon}(t) - \gamma_{N_\varepsilon}(s)\|_{\mathbb{P}} + \|\gamma_{N_\varepsilon}(s) - \gamma(s)\|_{\mathbb{P}} &< 3\varepsilon/3 . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Also ist  $\gamma$  stetig auf  $\mathcal{I}$ . Daraus folgt weiterhin mit der Dreiecksungleichung  $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_{\mathbb{P}} \leq \|\gamma(t)\|_{\mathbb{P}} + \|\gamma(s)\|_{\mathbb{P}} < \varepsilon$ , und somit ist die Norm der Phasenraumkurve auf dem gesamten Zeitintervall beschränkt.

In  $(\mathcal{K}, d)$  gilt sogar  $\gamma_a \rightarrow \gamma$  für  $a \rightarrow \infty$ . Zuvor hatten wir uns ja lediglich punktweise von der Vollständigkeit von  $(\mathcal{K}, d)$  überzeugt. Es gilt ja

$$\begin{aligned} d(\gamma, \gamma_a) &= \sup_{t \in \mathcal{I}} \lim_{b \rightarrow \infty} \|\gamma_b(t) - \gamma_a(t)\|_{\mathbb{P}} \\ &\leq \sup_{t \in \mathcal{I}} \sup_{b \geq a} \|\gamma_b(t) - \gamma_a(t)\|_{\mathbb{P}} \\ &= \sup_{b \geq a} d(\gamma_a, \gamma_b) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Damit haben wir die Aussage vollständig begründet. ■

**Konzept 2.2.3 — Fixpunkt.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  mit  $X \subset Y$ . Ein Element  $a \in X$  mit  $f(a) = a$  heißt **Fixpunkt** von  $f$ .

Bevor wir fortfahren, erlauben wir uns einige Bemerkungen zur Inspiration: Es seien  $V$  ein Vektorraum,  $X \subset V$  und  $f : X \rightarrow V$ . Setzen wir  $g(x) := f(x) + x$  für  $x \in X$ , so ist offenbar  $a \in X$  genau dann eine Nullstelle von  $f$ , wenn  $a$  ein Fixpunkt von  $g$  ist. Somit kann die Bestimmung der Nullstellen von  $f$  in diesem Fall auf die Bestimmung der Fixpunkte von  $g$  zurückgeführt werden. Im allgemeinen können einer Gleichung der Form  $f(x) = 0$  mehrere Fixpunktgleichungen zugeordnet werden. Es sei zum Beispiel  $V = \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze als einzige Nullstelle Null. Weiterhin sei  $g(x) := h(f(x)) + x$  für  $x \in X$ . Dann ist  $a \in X$  genau dann eine Nullstelle von  $f$ , wenn  $a$  ein Fixpunkt von  $g$  ist.

Schließlich sei  $X$  ein metrischer Raum, und  $a$  ein Fixpunkt von  $f : X \rightarrow Y$ . Außerdem sei  $x_0 \in X$ , und die Iteration  $x_{k+1} = f(x_k)$  sei für alle  $k \in \mathbb{N}$  (also unbeschränkt) durchführbar. Das heißt, die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  kann durch die Iterationsvorschrift  $x_{k+1} := f(x_k)$  rekursiv definiert werden. Letzteres bedeutet nämlich, daß  $f(x_k)$  wieder zu  $X$  gehört, falls  $x_k$  bereits definiert war. Gilt dann  $x_k \rightarrow a$ , so sage wir, daß  $a$  mit der **Methode der sukzessiven Approximation** berechnet wird, oder, daß die Methode der sukzessiven Approximation gegen  $a$  konvergiert. Beachten Sie, daß die Methode der sukzessiven Approximation selbst dann, wenn die Iteration unbeschränkt durchführbar ist und  $f$  nur einen einzigen Fixpunkt besitzt, im allgemeinen nicht zu konvergieren braucht. Als Beispiel hierfür mag folgendes dienen: Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch  $f(x) = 1 - x$ . Sie hat genau einen Fixpunkt, nämlich  $a = 1/2$ . Für die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{k+1} := f(x_k)$  gelten  $x_{2k} = x_0$  und  $x_{2k+1} = 1 - x_0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Also ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  für jedes  $x_0 \neq 1/2$  divergent.

**Konzept 2.2.4 — Kontraktion.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei metrischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt **Kontraktion**, falls es ein  $q \in (0, 1)$  gibt mit

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq q d_X(x, x') \quad (2.39)$$

für alle  $x, x' \in X$ .  $q$  heißt eine **Kontraktionskonstante** für  $f$ .

Beachten Sie, daß die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann eine Kontraktion ist, wenn  $f$  Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitz-Konstanten kleiner als eins.

**Aussage 2.2.3 — Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz.** Es sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum, und  $f : X \rightarrow X$  sei eine Kontraktion. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1)  $f$  hat genau einen Fixpunkt  $a$ .
- (2) Die Methode der sukzessiven Approximation konvergiert für jeden Startwert gegen  $a$ .
- (3) Ist  $q$  eine Kontraktionskonstante für  $f$ , so gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_k, a) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_1, x_0), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.40)$$

**Begründung:**

**Eindeutigkeit :** Es seien  $a, b \in X$  zwei verschiedene Fixpunkte von  $f$ . Dann gilt  $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq q d(a, b) < d(a, b)$ , was nicht möglich ist.

**Existenz und Konvergenz :** Es sei  $x_0 \in X$  als Startwert gewählt, und die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei durch  $x_{k+1} := f(x_k)$  für  $k \in \mathbb{N}$  rekursiv definiert. Dann gilt wegen der Kontraktionseigenschaft

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q d(x_n, x_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}/\{0\}. \quad (2.41)$$

Induktiv folgt hieraus für  $n, k \in \mathbb{N} : n > k \geq 0$  die Beziehung

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^{n-k} d(x_{k+1}, x_k). \quad (2.42)$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} d(x_n, x_k) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq \left( q^{n-k-1} + q^{n-k-2} + \cdots + 1 \right) d(x_{k+1}, x_k) \\ &= \frac{1-q^{n-k}}{1-q} d(x_{k+1}, x_k) \end{aligned} \quad (2.43)$$

für  $n > k \geq 0$ . Ebenfalls wegen Ungleichung (2.42) gilt  $d(x_{n+1}, x_n) \leq q^k d(x_1, x_0)$ . Somit folgt aus Ungleichung (2.43)

$$d(x_n, x_k) \leq \frac{q^k - q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (2.44)$$

für  $n > k \geq 0$ . Diese Abschätzung zeigt, daß  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist. Da  $X$  ein vollständiger metrischer Raum ist, gibt es ein  $a \in X$  mit  $x_k \rightarrow a$  für  $k \rightarrow \infty$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  und der Definition der Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ergibt sich nun, daß  $a$  ein Fixpunkt (und damit der einzige) ist.

**Fehlerabschätzung :** Da die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert, können wir in der letzten Ungleichung (2.44) den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  durchführen und erhalten so die behauptete Fehlerabschätzung.

Damit sind die Aussagen (1)–(3) begründet. ■

Unsere Vorbereitungen erlauben nun die grundlegende Aussage von Picard-Lindelöf zur lokalen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bringen und zu begründen.

**Aussage 2.2.4 — Picard-Lindelöf.** Es sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $E$  ein endlich-dimensionaler Banachraum,  $D \subset E$  offen,  $(t_0, x_0) \in J \times D$  und  $f$  bezüglich  $x \in D$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion  $f : J \times D \rightarrow E$ . Dann gibt es ein  $\tau > 0$  so, daß das

## Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.45)$$

auf  $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \subset J$  eine eindeutig bestimmte Lösung hat.

**Begründung:**

1. Weil  $J \times D \subset \mathbb{R} \times E$  offen ist, gibt es  $r, s > 0$  mit

$$R \stackrel{\text{def}}{=} [t_0 - s, t_0 + s] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset J \times D. \quad (2.46)$$

Aufgrund der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  bezüglich  $x \in D$  finden wir eine Konstante  $L > 0$  mit

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_E \leq L \|x - y\|_E, \quad (t, x), (t, y) \in R. \quad (2.47)$$

Schließlich folgt aus der Kompaktheit von  $R$  und der Tatsache, daß Lipschitz-stetige Funktionen auch stetige Funktionen sind, daß es ein  $M > 0$  gibt mit

$$\|f(t, x)\|_E \leq M, \quad (t, x) \in R. \quad (2.48)$$

2. Es seien  $\alpha := \text{Min}\{s, r/M, 1/(2L)\} > 0$  und  $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ . Weiterhin sei  $T : C(I, D) \rightarrow C(I, E)$ , definiert durch

$$T[y](t) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \int_{[t_0, t]} d\tau f(\tau, y(\tau)). \quad (2.49)$$

Wenn wir zeigen, daß die Abbildung  $T$  genau einen Fixpunkt  $u$  besitzt, so muß  $u$  die eindeutig bestimmte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems sein. Da  $s \mapsto f(s, u(s))$  stetig ist, folgt diese Aussage aus dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

3. Es sei

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in C(I, E) : y(t_0) = x_0, \text{Max}_{t \in I} \|y(t) - x_0\|_E \leq r\}. \quad (2.50)$$

Dann ist  $X$  eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraumes  $C(I, E)$ , also ein vollständiger metrischer Raum. Für  $y \in X$  gilt  $y(t) \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset D$  für  $t \in I$ . Also ist  $T[y]$  wohldefiniert, und es gelten  $T[y](t_0) = x_0$  sowie

$$\begin{aligned} \|T[y](t) - x_0\|_E &= \left\| \int_{[t_0, t]} d\tau f(\tau, y(\tau)) \right\|_E \\ &\leq \int_{[t_0, t]} d\tau \|f(\tau, y(\tau))\|_E \\ &\leq \text{Sup}_{(t, z) \in R} \|f(t, z)\|_E \int_{[t_0, t]} d\tau. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Mit Ungleichung (2.93) folgt  $\text{Sup}_{(t, z) \in R} \|f(t, z)\|_E \leq M$ . Weiterhin gilt wegen  $t \in I$ , daß  $t - t_0 \in [-\alpha, \alpha]$ . Wir sind an einer oberen Schranke interessiert, also  $t - t_0 \leq \alpha$ . Also ist  $\|T[y](t) - x_0\|_E \leq M \alpha$ . Aus der Definition von  $\alpha$  folgt  $\alpha \leq r/M$ . Einsetzen liefert  $\|T[y](t) - x_0\|_E \leq r$ . Somit bildet  $T$  den vollständigen metrischen Raum  $X$  in sich selbst ab.

4. Für  $y, w \in X$  finden wir

$$\begin{aligned} \|T[y](t) - T[z](t)\|_E &= \left\| \int_{[t, t_0]} d\tau (f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, w(\tau))) \right\|_E \\ &\leq \alpha \text{Max}_{t \in I} \|f(t, y(t)) - f(t, w(t))\|_E \\ &\leq \alpha L \text{Max}_{t \in I} \|y(t) - z(t)\|_E \end{aligned} \quad (2.52)$$

wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  bezüglich des zweiten Arguments.

Aufgrund der Definition von  $\alpha$  folgt daher (mit  $\alpha \leq 1/(2L)$ )

$$\|T[y] - T[w]\|_{C(I,E)} \leq \frac{1}{2} \|y - w\|_{C(I,E)}. \quad (2.53)$$

Somit ist  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum  $X$ . Damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Banachschen Fixpunktsatz (Kontraktionssatz) erfüllt. Dieser sichert einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $u$  in  $X$  zu, welcher die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems ist. ■

Die Lösung des Anfangswertproblems auf  $I$  kann mittels der Methode der sukzessiven Approximation gewonnen werden:

$$u_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \int_{[t_0,t]} d\tau f(\tau, u_n(\tau)), \quad n \in \mathbb{N}, t \in I, \quad (2.54)$$

mit  $u(t_0) = x_0$ . Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig auf  $I$  gegen den eindeutigen Fixpunkt  $u$ , und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u_n - u\|_{C(I,E)} \leq \alpha M / 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} / \{0\}. \quad (2.55)$$

Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der vorstehenden Begründung und aus Aussage (2) des Kontraktionssatzes. Die Aussage (3) des Banachschen Fixpunktsatzes liefert auch die Fehlerabschätzung

$$\|u_n - u\|_{C(I,E)} \leq 2^{1-n} \|u_1 - u_0\|_{C(I,E)}. \quad (2.56)$$

Da für Zeiten  $t \in I$

$$\|u_1(t) - u_0(t)\|_E = \left\| \int_{[t_0,t]} d\tau f(\tau, u_0(\tau)) \right\| \leq \alpha M \quad (2.57)$$

gilt, folgt die Behauptung.

■ **Beispiel 2.1** Mittels sukzessiver Approximation nähern wir die (uns in diesem Falle zur Veranschaulichung bekannte) Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{q} = q, q(0) = q_0 \in \mathbb{R}$  wie folgt:

$$q_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} q_0 \quad \text{und} \quad q_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} q_0 + \int_{[0,t]} ds q_n(s) \quad (2.58)$$

für  $n \in \mathbb{N} / \{0\}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_0 (1+t) \\ q_2(t) &= q_0 (1+t+t^2/2) \\ &\vdots \\ q_n(t) &= \sum_{a \in \mathcal{F}(n)} t^a / a! \end{aligned} \quad (2.59)$$

Für alle  $t \in \mathbb{R}$  konvergiert  $q_n(t)$  gegen  $q(t) = q_0 \exp(t)$ , und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall, aber nicht gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . ■

■ **Beispiel 2.2** Gegeben sei das Anfangswertproblem (harmonischer Oszillator mit Kreisfrequenz  $\omega \in \mathbb{R}^+$ )  $\ddot{q} = -\omega^2 q$ ,  $q(0) = A \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q}(0) = 0 \in \mathbb{R}$ . Wir setzen  $\zeta := (q, v)^T$  und betrachten die durch

$$\zeta_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} (q_0, 0)^T \text{ und } \zeta_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0(t) + \int_{[0,t]} ds f(\zeta_n(s)) \quad (2.60)$$

rekursiv definierte Folge  $(\zeta_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit dem explizit zeitunabhängigen Vektorfeld  $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ ,  $f(q, v) := (v, -\omega^2 q)^T$ . Wir finden

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= (A, -\omega^2 A t)^T \\ \zeta_2(t) &= (A(1 - (\omega t)^2/2), -\omega A(\omega t))^T \\ \zeta_3(t) &= (A(1 - (\omega t)^2/2), -\omega A((\omega t) - (\omega t)^3/3!))^T \\ \zeta_4(t) &= (A(1 - (\omega t)^2/2! + (\omega t)^4/4!), -\omega A((\omega t) - (\omega t)^3/3!))^T \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.61)$$

Per vollständiger Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$  können Sie sich davon überzeugen, daß die Folge  $(\zeta_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle Zeiten gegen  $A(\cos(\omega t), -\omega \sin(\omega t))^T$  konvergiert. ■

Es stellt sich noch folgendes wichtiges Problem: In der naturwissenschaftlichen und technischen Praxis sind uns die benötigten Anfangswerte nie punktgenau bekannt. Wir werden später verstehen, daß sie uns aufgrund fundamentaler Prinzipien auch gar nicht so genau bekannt sein können. Damit drängt sich die Frage auf, ob die dank der Methode der sukzessiven Approximation konstruktive Aussage von Picard-Lindelöf für unsere Zwecke impotent ist. Die Antwort gibt folgende Aussage:

**Aussage 2.2.5** Unter den Voraussetzungen der Aussage von Picard-Lindelöf existiert zu jedem Punkt  $(T_0, X_0) \in \mathbb{U}$  des erweiterten Phasenraumes  $\mathbb{U}$  eine kompakte Umgebung  $V \subset \mathbb{U}$  und ein Intervall  $I_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon]$  mit  $\varepsilon > 0$  so, daß die Familie

$$\Phi: I_\varepsilon \times V \rightarrow \mathbb{U}, \quad (\delta; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t_0 + \delta) \quad (2.62)$$

der Lösungen des Anfangswertproblems eine stetige Abbildung ist. Damit ist gemeint, daß die Lösung stetig von den Anfangswerten und von der Zeit abhängt.

## 2.2.2 Globale Aussagen

Wir wenden uns nun globalen Aspekten mechanischer Systeme zu.

**Konzept 2.2.5 — Lösung der Bewegungsgleichung.** Ist  $f: \mathbb{P} \rightarrow T\mathbb{P}$  ein zeitunabhängiges Vektorfeld auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems, dann heißt eine Kurve  $\varphi \in C^1(I, \mathbb{P})$  **Lösung der Differentialgleichung**  $\dot{x} = f(x)$ , wenn für alle Zeiten  $t \in I \subset \mathbb{R}$  gilt:  $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ .

**Konzept 2.2.6 — Vollständiges Vektorfeld.** Ein Vektorfeld  $f: \mathbb{P} \rightarrow T\mathbb{P}$  auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems heißt **vollständig**, wenn für alle  $x_0 \in \mathbb{P}$  das Anfangswertproblem  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  eine eindeutige Lösung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  besitzt.

Vollständigkeit ist ein wichtiges Konzept an dem immens wichtige Aussagen hängen wie zum Beispiel: Newtonsche Gravitation ist keine fundamentale Beschreibung, Schwarze Löcher beherbergen jenseits des Ereignishorizontes eine Raumzeit-Singularität, die dem kosmische Urknall vorangehende Phase einer inflationären Expansion beginnt am Ende der Raumzeit.

Ein wunderbares Kriterium für Vollständigkeit bietet Lipschitz-Stetigkeit, wie folgende Aussage zeigt.

**Aussage 2.2.6** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein reelles Intervall, und das zeitabhängige Vektorfeld  $f : I \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  auf dem erweiterten Phasenraum  $I \times \mathbb{P}$  eines mechanischen Systems erfülle die zeitabhängige Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{\mathbb{P}} \leq L(t) \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{P}} \quad (2.63)$$

für alle  $t \in I$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$  mit einer stetigen Lipschitz-Funktion  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Dann hat das Anfangswertproblem  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{P}$  für alle Anfangswerte  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{P}$  eine eindeutige Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{P}$ .

Beachten Sie, daß sich der Fall mit einem zeitunabhängigen Vektorfeld hieraus durch die Ersetzung des Zeitintervalls mit ganz  $\mathbb{R}$  und konstanten Lipschitz-Funktionen (also Lipschitz Konstanten) ergibt.

**Begründung:** Die Hauptschwierigkeit bei der Begründung liegt darin, die Aussage von Picard-Lindelöf und deren Begründung von der lokalen auf die globale Situation anzuheben und das Vorgehen entsprechend zu adaptieren. Dabei wird die globale Aussage in geeigneter Weise aus lokalen Betrachtungen zusammengesetzt.

1. Es genügt kompakte Zeitintervalle  $I$  mit  $t_0 \in I$  zu betrachten. Dann ist wegen der Stetigkeitsannahme  $\sup_{t \in I} L(t)$  endlich. Es gibt also eine Lipschitz-Konstante  $\ell \geq 1$  mit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{T\mathbb{P}} \leq \ell \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{P}} \quad (2.64)$$

für  $t \in I$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ .

In der Begründung von der Aussage von Picard-Lindelöf war die das Zeitintervall  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  definierende Konstante  $\alpha = \text{Min}\{s, r/M, 1/(2L)\}$ , wobei  $s$  die temporale Domäne definierte,  $r$  war der Radius des abgeschlossenen Balls  $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset \mathbb{P}$  um den Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{P}$  und  $M \in \mathbb{R}^+$  die Normschränke des Vektorfeldes  $f$  für alle Phasenraumpunkte im Ball  $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ , also  $M := \text{Max}_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)} \|f(x)\|$ . Wir wählen  $r$  oder  $s$  so klein, daß  $\alpha = \text{Min}\{r, r/M, 1/(2\ell)\}$ , und haben  $\ell$  für die Lipschitz-Konstante eingesetzt. Da der letzte Term in  $\{r, r/M, 1/(2\ell)\}$  lediglich von  $\ell$  abhängt und explizit unabhängig vom Anfangswert ist, versuchen wir zunächst  $M$  durch  $\ell$  auszudrücken:  $M = \text{Max}_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)} \|f(x) - f(x_0) + f(x_0)\|_{T\mathbb{P}} \leq \text{Max}_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)} \|f(x) - f(x_0)\|_{T\mathbb{P}} + \|f(x_0)\|_{T\mathbb{P}}$ . Wegen der Lipschitz-Stetigkeit folgt weiter  $M \leq \ell \text{Max}_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)} \|x - x_0\|_{\mathbb{P}} + \|f(x_0)\|_{T\mathbb{P}} \leq \ell r + \|f(x_0)\|_{T\mathbb{P}}$  definitionsgemäß für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ . Wir wählen nun  $r$  derart, daß das Verhältnis  $r/M$  unabhängig vom Anfangspunkt wird. Der Preis hierfür ist natürlich, daß  $r$  explizit vom Anfangspunkt abhängen wird. Gelingt aber eine Wahl so, daß  $r > 1/(2\ell)$ , so ist  $\alpha$  vom Anfangspunkt unabhängig. Eine solche Wahl ist  $r := \|f(x_0)\|_{T\mathbb{P}} + 1/(2\ell)$ , denn hierfür wird  $M \leq \ell r + r - 1/(2\ell) \leq (1 + \ell)r$  (damit haben wir  $r/M$  zu kleinen



Werten hin abgeschätzt, was hinsichtlich des gesuchten Minimums in Ordnung ist), und gleichzeitig  $r = \|f(x_0)\|_{T\mathbb{P}} + 1/(2\ell) > 1/(2\ell)$ . Damit ist

$$\alpha = \text{Min} \left\{ \|f(x_0)\|_{T\mathbb{P}} + \frac{1}{2\ell}, \frac{1}{1+\ell}, \frac{1}{2\ell} \right\} = \frac{1}{2\ell} \quad (2.65)$$

explizit unabhängig von den Anfangsbedingungen. Die Hauptarbeit ist getan.

2. Für beliebige Zeiten  $t_k \in I$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) und Anfangswerte  $x_k \in \mathbb{P}$  können wir mittels der Aussage von Picard und Lindelöf die eindeutige lokale Lösung  $\varphi_k : I_k \rightarrow \mathbb{P}$  des Anfangswertproblems  $\dot{x} = f(t, x)$  mit  $\varphi_k(t_k) = x_k$  auf dem Intervall  $I_k := [t_k - \alpha, t_k + \alpha] \cap I$  finden. Es sei  $t_k := t_0 + k\alpha/2 \in I$  für geeignete  $k \in \mathbb{N}$ . Wir setzen die Kenntnis der Lösung  $\varphi_{k-1}$  voraus und wählen als intermediären Anfangswert für die Lösung auf dem nachfolgenden Zeitintervall  $x_k := \varphi_{k-1}(t_k)$ . Analog wählen wir für ganzzahlige  $k < 0$  den Anfangswert  $x_k := \varphi_{k+1}(t_k)$ .

3. Zum Zeitpunkt  $t_k \in I_{k-1} \cap I_k$  ( $k > 0$ ) ist also  $\varphi_{k-1}(t_k) = \varphi_k(t_k)$ . Wegen der Eindeutigkeit der lokalen Lösung des Anfangswertproblems<sup>1</sup> erhalten wir mit

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{P}, \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_k(t) \text{ falls } t \in I_k \quad (2.66)$$

eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Damit haben wir mittels lokaler Methoden die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung obigen Anfangswertproblems nachgewiesen. ■

■ **Beispiel 2.3** Gegeben sei das Anfangswertproblem  $\dot{x}/x_* = \text{Sin}(x/x_*)$  mit  $x_0 := x(0) = \pi/2x_*$ . Hierbei ist  $x_*$  eine Referenzskala und die Ableitung ist nach der dimensionslosen Zeit  $t/t_*$  mit der Referenzzeit  $t_*$ . Der Sinus ist auf  $\mathbb{R}$  Lipschitz-stetig. Also besitzt das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung, die wir durch Trennung der Variablen gewinnen:

$$t/t_* = \int_{x(0)/x_*}^{x/x_*} dy \frac{1}{\text{Siny}} = [\text{Log}(\text{Tan}(y/2))]_{x(0)/x_*}^{x/x_*} = \text{Log} \left( \frac{\text{Tan}(x/x_*/2)}{\text{Tan}(\pi/4)} \right), \quad (2.67)$$

also  $x(t)/x_* = 2\text{Arctan}(\text{Exp}(t/t_*))$ . Wir können die Lösung für große  $|t/t_*| \gg 1$  auswerten. Für  $t/t_* \rightarrow \infty$  gilt  $x/x_* \rightarrow \pi$  und für  $t/t_* \rightarrow -\infty$  gilt  $x/x_* \rightarrow 0$ . ■

### 2.2.3 Von explizit zeitabhängigen dynamischen Systemen zu autonomen Differentialgleichungen

Auch explizit zeitabhängige dynamische Systeme können auf autonome Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Statt  $\dot{x} = f(t, x)$  mit  $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  betrachten wir das dazu assoziierte autonome Differentialgleichungssystem

$$\dot{y} = g(y) \text{ mit } y \stackrel{\text{def}}{=} (s, x)^T, \quad g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}, \quad g(y) \stackrel{\text{def}}{=} (1, f(y))^T. \quad (2.68)$$

Der Preis für die Autonomisierung des explizit zeitabhängigen dynamischen Systems ist durch die Erhöhung der Dimension des Phasenraums gegeben, indem wir den Zeitparameter  $s$  zum Phasenraumpunkt  $x$  hinzufügen. Ausgeschrieben lautet die Gleichung (2.68) folgendermaßen:  $\dot{s} = 1$ ,  $\dot{x} = f(s, x)$ . Ist nun  $\psi : I \rightarrow \mathbb{U}$  eine Lösung des Systems

<sup>1</sup>Mit den Bezeichnungen der Aussage von Picard und Lindelöf sei  $f : J \times D \rightarrow E$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und  $u : J_u \rightarrow D$  und  $v : J_v \rightarrow D$  seien Lösungen des Anfangswertproblems  $\dot{x} = f(t, x)$  mit  $u(t_0) = v(t_0)$  für ein  $t_0 \in J_u \cap J_v$ . Dann gilt  $u(t) = v(t)$  für jedes  $t \in J_u \cap J_v$ .

(2.68), dann gilt mit  $\psi(t) = (s(t), x(t))^T$ , daß  $s(t) = s(0) + t$  mit  $s(0) \in \mathbb{R}$  frei wählbar. Bis auf diese additive Konstante stimmt die Phasenraumkoordinate  $s$  also mit der Zeit  $t$  überein. Die Lösung des Anfangswertproblems (2.68) ergibt daher eine Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  wie folgt:  $x(t) = z(t - t_0)$ . Umgekehrt liefert eine Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  durch Ergänzung wie oben eine Lösung des Anfangswertproblems (2.68).

Ist  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{P}$  in allen Argumenten Lipschitz-stetig, dann ist dies auch  $g$ . Damit überträgt sich die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage. Beachten Sie, daß wir für explizit zeitabhängige dynamische Systeme keine Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der Zeit gefordert haben.

## 2.2.4 Autonome Botanik

In diesem Abschnitt tragen wir einige autonome Konzepte zusammen, die uns wichtige Denkansätze zur Analyse dynamischer Systeme liefern.

**Konzept 2.2.7 — Phasenfluß.** Es existiere für alle  $x_0 \in \mathbb{P}$  eine eindeutige Lösung  $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  des Anfangswertproblems  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems. Dann heißt die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , erklärt durch  $(t, x) \rightarrow \varphi_x(t)$ , der **Phasenfluß** der Differentialgleichung.

Wir haben ja bereits gelernt, lokale Aussagen über dynamische System wertzuschätzen. Insbesondere wollen wir nicht immer voraussetzen, daß die Lösung eines Anfangswertproblems für alle Zeiten zu existieren braucht. Darum:

**Konzept 2.2.8** Es sei  $X : \mathbb{P} \rightarrow T\mathbb{P}$  ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems, dessen Dynamik durch  $\dot{z} = X(z)$  beschrieben wird.

- (1) Es sei  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{P}$  eine Lösung der Differentialgleichung mit maximalen Zeitintervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Das Bild  $\varphi(I) \subset \mathbb{P}$  heißt **Orbit**. Für  $z \in \varphi(I)$  heißt  $\mathcal{O}(z) := \varphi(I)$  der **Orbit durch  $z$** .
- (2) Ist  $X(z_*) = 0$ , dann heißt  $z_* \in \mathbb{P}$  **singulärer Punkt** des Vektorfeldes  $X$ . Im singulären Punkt ist das Richtungsfeld  $z \rightarrow X(z) / \|X(z)\|$  undefiniert und läßt sich auch nicht stetig auf  $z_*$  fortsetzen. Ein singulärer Punkt von  $X$  heißt **Ruhelage** oder **Gleichgewichtslage** der Differentialgleichung.
- (3) Der Punkt  $z \in \mathbb{P}$  heißt **periodischer Punkt** mit **(Minimal)-Periode**  $T > 0$ , wenn gilt  $\varphi_z(T) = z$  und  $\varphi_z(t) \neq z$  für alle  $t \in (0, T)$ . Ein Orbit  $\mathcal{O}(z)$  heißt **geschlossen**, wenn  $z \in \mathbb{P}$  ein periodischer Punkt ist.

Für einen singulären Punkt  $z_* \in \mathbb{P}$  des Vektorfeldes  $X$  ist die konstante Funktion  $\varphi_{z_*}(t) = z_*$  die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Wir rücken nun den Phasenfluß in den Fokus unserer Betrachtungen. Diese Perspektive steht oft am Anfang der Theorie dynamischer Systeme, liefert dann aber einen abstrakteren Zugang, den wir hier vermieden haben. Wir sind nun in der Lage, das Konzept des Phasenflusses zu würdigen und sehen darin eine Motivation für das Folgende.

**Konzept 2.2.9 — Dynamisches System.** Für die additive geschriebene Gruppe  $G := (\mathbb{R}, +)$  heißt eine Familie von Abbildungen  $\Phi_t : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  ( $t \in G$ ) auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  **dynamisches System**, wenn gilt  $\Phi_0 = \text{id}_{\mathbb{P}}$  und  $\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}$  für alle  $t_1, t_2 \in G$ .

Dieses Konzept kann viel allgemeiner formuliert werden. Zum einen kann auch die additiv geschriebene Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$  genutzt werden, was dann zu diskreten dynamischen Systemen führt. Dementsprechend haben wir es mit einem kontinuierlichen dynamischen System zu tun. Zum anderen braucht der Phasenraum keine topologische Struktur aufzuweisen, es kann sich um eine beliebige Menge handeln. An dieser Stelle lohnt es sich einmal mehr die Existenz einer Topologie auf unseren Phasenräumen zu genießen, die es uns ja zum Beispiel erlaubt von Grenzwerten zu sprechen.

**Konzept 2.2.10 — Topologische Dynamische Systeme.** Ein dynamisches System  $(\Phi_t)_{t \in G}$  auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  heißt ein **topologisches dynamisches System**, wenn  $\mathbb{P}$  ein topologischer Hausdorff-Raum ist und wenn  $\Phi : G \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , definiert durch  $\Phi(t, p) := \Phi_t(p)$ , eine stetige Abbildung ist.

Hierbei wird  $G = (\mathbb{R}, +)$  als topologische Gruppe verstanden und auf  $G \times \mathbb{P}$  wird die Produkttopologie benutzt.

**Aussage 2.2.7** Gegeben sei das Anfangswertproblem  $\dot{z} = X(z)$  mit einem lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeld  $X : \mathbb{P} \rightarrow T\mathbb{P}$ . Besitzt dieses Problem eine Lösung  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , so ist  $\Phi$  ein topologisches dynamisches System.

**Begründung:** Überzeugen Sie sich davon, daß die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , definiert durch  $(t, z) \rightarrow \varphi_z(t)$ , stetig ist. Die Forderung, daß  $\Phi_0 = \text{id}_{\mathbb{P}}$  gilt, ist wegen der Eigenschaft  $\varphi_{z_0}(0) = z_0$  der Lösung des Anfangswertproblems erfüllt. Die Kompositionseigenschaft  $\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}$  ( $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ) ist wegen der Eindeutigkeit und wegen der temporalen Translationsinvarianz der Lösung erfüllt. ■

Gegeben sei ein Vektorfeld  $X \in C^1(U \subset \mathbb{P}, T\mathbb{P})$  auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems. Eine interessante Frage ist die nach dem maximalen Definitionsbereich des Phasenflusses  $\Phi$ , das heißt wir wollen für die Anfangszeit  $t_0 = 0$  allen möglichen Anfangswerten  $z_0 \in \mathbb{P}$  das maximale Zeitintervall zuordnen, für das die Lösung des Anfangswertproblems definiert ist. Nach der Aussage von Picard-Lindelöf ist dies eine offene Umgebung von  $t_0 = 0$ . Das maximale Zeitintervall ist also von der Form  $(T^-(x_0), T^+(x_0))$  mit  $-\infty \leq T^-(x_0) < 0 < T^+(x_0) \leq \infty$ . Die entsprechende Lösung des Anfangswertproblems heißt **maximale Lösung**. Die Zeiten  $T^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  werden **Fluchtzeiten** genannt, wobei  $\overline{\mathbb{R}}$  die erweiterte reelle Zahlengerade bezeichne.

■ **Beispiel 2.4 — Fluchtzeiten.** Auf dem Phasenraum  $\mathbb{P} := \mathbb{R}^2 / \{0\}$  sei das Anfangswertproblem für das konstante Vektorfeld  $X(z) = e_1$  mit  $e_1 := (1, 0)^T$  gegeben. Also  $\Phi_t(z) = z + te_1$ . Gilt in Komponenten  $z = (z_1, z_2)^T$  so ist der Phasenfluß ausführlicher  $\Phi_t(z) = (z_1 + t, z_2)$ . Für  $z_2 \neq 0$  ist dieser für alle Zeiten  $t \in \overline{\mathbb{R}}$  definiert, insbesondere auch für  $t = -z_1$ , denn  $\Phi_{-z_1}(z) = (0, z_2)^T \in \mathbb{P}$ . Es war wichtig, den Fall  $z_2 = 0$  auszuschließen, ansonsten wäre  $\Phi_{-z_1}(z) = (0, 0)^T \notin \mathbb{P}$ . Somit kann für  $z_2 = 0$  das maximale Zeitintervall nicht unbeschränkt sein. Für den Fall  $z_1 < 0, z_2 = 0$  finden wir als maximales Zeitintervall  $(-\infty, |z_1|)$ . Für den Fall  $z_1 > 0, z_2 = 0$  finden wir als maximales Zeitintervall  $(-z_1, \infty)$ . ■

Dieses einfache Beispiel liefert eine wichtige Beobachtung: Im Fall  $z_1 < 0, z_2 = 0$  ist  $T^+(z_1, z_2) = |z_1|$ . Für jeden anderen Wert von  $z_2$  springt  $T^+$  nach oben, und zwar von  $|z_1|$  auf  $\infty$ . Ebenso springt  $T^-$  nach unten im anderen Fall. Es zeigt sich, daß unsere Beobachtung am Beispiel verallgemeinerungsfähig ist. Hierzu erinnern wir an folgendes:

**Konzept 2.2.11 — Halbstetigkeit.** Eine Funktion  $f : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  auf einem topologischen Raum (wir haben es durchweg mit metrisierbaren Topologien zu tun)  $\mathbb{P}$  heißt **oberhalbstetig** bzw. **unterhalbstetig bei**  $z_0 \in \mathbb{P}$ , wenn

$$f(z_0) \geq \limsup_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ bzw. } f(z_0) \leq \liminf_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (2.69)$$

und **oberhalbstetig** bzw. **unterhalbstetig**, wenn die Funktion für alle  $z_0 \in \mathbb{P}$  oberhalbstetig bzw. unterhalbstetig bei  $z_0$  ist.

**Aussage 2.2.8** Gegeben sei ein mechanisches System mit Phasenraum  $\mathbb{P}$ . Die Fluchtzeit  $T^+ : U \subset \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist unterhalbstetig, die Fluchtzeit  $T^- : U \subset \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist oberhalbstetig. Damit ist der maximale Definitionsbereich des Phasenflusses  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{P}$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, z) \in \mathbb{R} \times U : t \in (T^-(z), T^+(z))\} \quad (2.70)$$

eine offene Teilmenge des erweiterten Phasenraums.

### Begründung:

1. Es sei  $z_0 \in U$ . Wegen der Offenheit von  $U$  im Phasenraum  $\mathbb{P}$  existiert eine Umgebung  $U_r(z_0)$  mit  $\overline{U_r(z_0)} \subset U$ . Da  $\overline{U_r(z_0)}$  kompakt ist, ist die Einschränkung des Vektorfeldes  $X \in C^1(U, T\mathbb{P})$  auf diese Menge Lipschitz-stetig. Nach der Aussage von Picard-Lindelöf existiert dann ein  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  so, daß für alle  $y \in U_{r/2}(z_0)$  das Anfangswertproblem  $\dot{z} = X(z)$ ,  $z(0) = y$  für  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  eindeutig lösbar ist.
2. Es sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Zeitfolge mit Startwert  $t_1 = 0$  und  $t_n \rightarrow T^+(z_0)$  für  $n \rightarrow \infty$  derart, daß für geeignete  $0 < r_n \in \mathbb{R}$  und  $0 < \varepsilon_n \in \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem
 
$$\dot{z} = X(z), \quad z(0) = y \quad \forall r \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n), y \in U_{r_n/2}(z_n) \quad (2.71)$$
 lösbar ist. Hierbei bezeichnet  $z_n := \Phi_{t_n}(z_0)$ . Wir nehmen an, daß  $t_{n+1} - t_n < \varepsilon_n$  gilt.

3. Annahme des Gegenteils:  $T^+$  sei **nicht** unterhalbstetig bei  $z_0$ . Dies bedeutet, daß

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{z \rightarrow z_0} T^+(z) < T^+(z_0). \quad (2.72)$$

Weiterhin sei  $k \in \mathbb{N}$  so gewählt, daß  $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$ . Unsere Annahme am Ende von 2. bedeutet nun  $t_{k+1} < t_k + \varepsilon_k$  und damit auch  $\tau < t_k + \varepsilon_k$ . Wegen der Stetigkeit des Phasenflusses in den Anfangsbedingungen (haben wir nicht gezeigt) gibt es eine Umgebung  $V \subset U$  mit  $z_0 \in V$  derart, daß  $\Phi_{t_k}(V) \subset U_{r_k/2}(z_n)$ , und für alle  $y \in V$  gilt

$$T^+(y) = t_k + T^+(\Phi_{t_k}(y)) \geq t_k + \varepsilon_k > \tau. \quad (2.73)$$

Widerspruch zur Annahme in Gleichung (2.72)!

4. Die Offenheit von  $D$  überlassen wir Ihrer Übung.

Modulo der Übung sind alle Aussagen begründet. ■

Wir haben hier die Fluchtzeit-Problematik lediglich für autonome Systeme analysiert. Nach den Einsichten des letzten Abschnitts bedeutet dies aber keinerlei Einschränkung und entsprechende Aussagen gelten auch für explizit zeitabhängige Systeme.

■ **Beispiel 2.5 — Fluchtzeiten in Newtonscher Gravitation.** Gegeben sei eine Partikelchen der Masse  $m \in (0, \infty)$  im Ortsraum  $\mathcal{Q} := (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ , das sich im Gravitationspotential eines im Ursprung lokalisierten Partikelchens befinde, dessen Masse  $M \gg m$  derart ist, daß es im Rahmen der Genauigkeit unserer Betrachtung immer in Ruhe bleibt. Der Phasenraum dieses dynamischen Systems ist  $\mathbb{P} = \mathcal{Q} \times \mathcal{V}$  mit dem Geschwindigkeitsraum  $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ . Auf diesem Phasenraum ist die Energiefunktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  des Partikelchens mit der Masse  $m$  durch  $E(q, v) := \frac{m}{2}(v^2 - \frac{q_g}{q})$  gegeben. Hierbei bezeichnet  $q_g := 2G_N M$  den gravitativen Radius des Partikelchens der Masse  $M$ . Beachten Sie, daß die möglichen Geschwindigkeiten durch die Problemstellung nicht eingeschränkt sind, während das Partikelchen der Masse  $m$  weder am Ursprung (Koinzidenz) lokalisiert sein darf, noch unendlich weit weg von diesem sein soll (Ende der Raumzeit). Diese Einschränkungen gelten nicht nur für die Anfangsbedingungen, sondern müssen auch dynamisch respektiert werden. Mit anderen Worten, wenn wir nachweisen können, daß Anfangsbedingungen derart existieren, daß die Randpunkte von  $\mathcal{Q}$  in endlicher Zeit erreicht werden können, dann weist dies auf einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich der Newtonschen Gravitation hin. Und dieser wird durch die Fluchtzeiten beschrieben.

Wir setzen  $z := (q, v)^T$  und haben mit dem Vektorfeld  $X : \mathbb{P} \rightarrow T\mathbb{P}$ , definiert durch  $X(z) = m^{-1}(\text{grad}_{\mathcal{V}} E(z), -\text{grad}_{\mathcal{Q}} E(z))^T$ , das autonome dynamische System  $\dot{z} = X(z)$  vorliegen. Das vollständige Anfangswertproblem ist durch die Anfangsbedingungen  $z(0) = z_0$  gegeben. Entlang einer Bewegung gilt  $\dot{E}(z) = \langle \text{grad}_{\mathbb{P}} E, \dot{z} \rangle = 0$ , also Energieerhaltung. Dies impliziert

$$v(q) = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{q_g}{q}}, \quad (2.74)$$

wobei  $E_0 := E(z_0)$ . Beachten Sie, daß  $E_0$  positiv, Null oder negativ sein kann. Folgende Fallunterscheidungen erschöpfen das Anfangswertproblem:

(1)  $\mathbf{v}_0 > \mathbf{0}, \mathbf{E}_0 \geq \mathbf{0}$ : Mit  $\tau := t/q_0$ ,  $\mathcal{E} := 2E_0/m$  und  $r := q/q_g$  ist für  $\tau \geq 0$

$$r'(\tau) = \sqrt{\mathcal{E} + r^{-1}(\tau)} \geq \sqrt{\mathcal{E}} \leadsto r(\tau) \geq r_0 + \tau \sqrt{\mathcal{E}}. \quad (2.75)$$

Wegen  $q_0 \in \mathcal{Q}$  und  $\tau \geq 0$  wird der linke Rand (Koinzidenz) des Ortsraums  $\mathcal{Q}$  nie erreicht für positive Zeiten. Unter den selben Voraussetzungen gilt weiterhin

$$r'(\tau) = \sqrt{\mathcal{E} + r^{-1}(\tau)} \leq \sqrt{\mathcal{E} + r_0^{-1}} \leadsto r(\tau) \leq r_0 + \tau \sqrt{\mathcal{E} + r_0^{-1}}. \quad (2.76)$$

Somit wird der rechte Rand von  $\mathcal{Q}$  nicht nach endlich langer Zeit erreicht. Die Fluchtzeit ist unabhängig von  $q_0 \in \mathcal{Q}$  immer  $T^+ = \infty$  für  $v_0 > 0$ , vorausgesetzt die kinetische Energie dominiert die potentielle Energie.

(2)  $\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{0}, \mathbf{E}_0 < \mathbf{0}$ : Die Differentialgleichung  $r'(\tau) = -(r^{-1}(\tau) - |\mathcal{E}|)^{1/2}$  wird mit Trennung der Variablen zu

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_{r_0}^r du \frac{1}{\sqrt{u^{-1} - |\mathcal{E}|}} \\ &= \left[ \frac{u}{|\mathcal{E}|} \sqrt{\frac{1}{u} - |\mathcal{E}|} + \frac{1}{2|\mathcal{E}|^{3/2}} \arctan \left( \frac{1}{2\sqrt{|\mathcal{E}|}} \sqrt{\frac{1}{u} - |\mathcal{E}|} \frac{2|\mathcal{E}| - 1/u}{2(|\mathcal{E}| - 1/u)} \right) \right]_{r_0}^r \\ &=: h(r) - h(r_0). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Das Integral ist für  $r \in (0, 1/|\mathcal{E}|)$  wohldefiniert im Reellen. Offenbar wird der rechte Rand des Ortsraumes nie erreicht. Im Limes  $r \rightarrow 0^+$  erhalten wir dagegen  $\tau \rightarrow \pi/(4|\mathcal{E}|^{3/2}) - h(r_0)$ . Also ist die Fluchtzeit, in der das Punktteilchen den linken Rand von  $\mathcal{Q}$  erreicht,  $T^- = \pi q_g/(4|\mathcal{E}|^{3/2}) - q_g h(q_0/q_g)$  endlich für alle  $q_0 \in \mathcal{Q}$  und negative Anfangsgeschwindigkeiten, vorausgesetzt die potentielle Energie dominiert über die kinetische Energie. Wir sagen dann, daß das Punktteilchen an das Kraftzentrum gebunden ist und in diesem Fall sogar nach endlicher Zeit in das Kraftzentrum stürzt. Die Beschreibung bricht spätestens nach der Zeit  $T^-$  zusammen. Das sehen wir auch daran, daß zum Zeitpunkt  $T^-$  die Geschwindigkeit des Punktteilchens, die ja eine Beobachtungsgröße ist, beliebig groß wird. Dieses singuläre Verhalten beim Erreichen des linken Randpunktes von  $\mathcal{Q}$  qualifiziert das Newtonsche Gravitationspotential als unvollständig.

- (3)  $\mathbf{v}_0 > \mathbf{0}, \mathbf{E}_0 < \mathbf{0}$ : Die Differentialgleichung  $r'(\tau) = +(r^{-1}(\tau) - |\mathcal{E}|)^{1/2}$  wird mit Trennung der Variablen zu

$$\tau = + \int_{r_0}^r du \frac{1}{\sqrt{u^{-1} - |\mathcal{E}|}} = h(r_0) - h(r). \quad (2.78)$$

Die Differentialgleichung verliert ihre Gültigkeit bei  $r' = 0$ , also wenn  $r = 1/|\mathcal{E}|$ . Bis dahin vergeht die Zeit  $h(r_0) - h(1/|\mathcal{E}|) = h(r_0) + \pi/(4|\mathcal{E}|^{3/2})$ . Da  $E_0 < 0$ , das Punktteilchen also an das Kraftzentrum gebunden ist, gibt es einen Wendepunkt der Bewegung:  $r = 1/|\mathcal{E}|$  ist seine maximale Entfernung vom Kraftzentrum, die es Dank seiner positiven Anfangsgeschwindigkeit erreichen kann. Danach wird es mit negativer Geschwindigkeit hin zum linken Randpunkt von  $\mathcal{Q}$  gezogen, das heißt es ist wieder im Regime (2). Es braucht die Zeit  $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) - h(1/|\mathcal{E}|)$ , bis es von seiner maximalen Entfernung das Kraftzentrum erreicht. Insgesamt ist damit die Zeit  $h(r_0) + h(0) - 2h(1/|\mathcal{E}|) = h(r_0) + 3\pi/(4|\mathcal{E}|^{3/2})$  vergangen, und dies ist wieder eine endliche Fluchtzeit, in der das Punktteilchen den linken Rand des Ortsraums erreicht. Ein gebundenes Teilchen hat in einer Raumdimension somit immer das gleiche Schicksal, nämlich nach endlich langer Zeit den linken Rand seines Ortsraums zu erreichen. In höheren Dimensionen gibt es hierzu eine Alternative, nämlich mittels eines endlichen Bahndrehimpulses kann das Punktteilchen sich um das Kraftzentrum bewegen, ohne dies je zu erreichen. Allerdings bleibt die Aussage korrekt, daß immer eine Anfangsbedingung existiert, für die der Sturz ins Kraftzentrum nach endlicher Zeit unausweichlich bleibt. Damit ist das Newtonsche Gravitationspotential schlechthin unvollständig.

- (4)  $\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{0}, \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$ : Die Differentialgleichung  $r'(\tau) = -r^{-1/2}(\tau)$  wird mit Trennung der Variablen zu

$$\tau = - \int_{r_0}^r du \sqrt{u} = -\frac{2}{3} \left( r^{3/2} - r_0^{3/2} \right) \rightsquigarrow r(\tau) = \left( r_0^{3/2} - \frac{3}{2} \tau \right)^{2/3}. \quad (2.79)$$

Wir können die endliche Fluchtzeit für den Sturz ins Kraftzentrum direkt ablesen:  $T^-(r_0) = 2r_0^{3/2}/3$ .

- (4)  $\mathbf{v}_0 < \mathbf{0}, \mathbf{E}_0 > \mathbf{0}$ : Die Differentialgleichung  $r'(\tau) = -(r^{-1}(\tau) + \mathcal{E})^{1/2}$  wird mit Tren-

nung der Variablen zu

$$\begin{aligned}\tau &= - \int_{r_0}^r du \frac{1}{\sqrt{u^{-1} + \mathcal{E}}} \\ &= - \left[ \frac{u}{\mathcal{E}} \sqrt{\frac{1}{u} + \mathcal{E}} - \frac{1}{2\mathcal{E}^{3/2}} \log \left( 2\sqrt{\mathcal{E}}u \sqrt{\frac{1}{u} + \mathcal{E}} + 2\mathcal{E}u + 1 \right) \right]_{r_0}^r \\ &= g(r) - g(r_0).\end{aligned}\tag{2.80}$$

Im Limes  $r \rightarrow 0^+$  finden wir  $g(r) \rightarrow 0$ . Die endliche Fluchtzeit für das Erreichen des linken Randes von  $\mathcal{Q}$  ist  $T^-(r_0) = g(r_0)$ .

Damit haben wir alle Fälle behandelt. Nur im Fall (1) wird kein Rand des Ortsraums erreicht. In allen anderen Fällen wird der linke Rand von  $\mathcal{Q}$  in endlicher Fluchtzeit erreicht, während der rechte Rand immer unerreicht bleibt. Wir sagen daher, daß das Newtonsche Gravitationspotential am linken Rand unvollständig ist. ■

## 2.3 Lineare dynamische Systeme

Eine besonders wichtige Klasse von mechanischen Systemen sind lineare dynamische Systeme. Zum einen existiert für diese Differentialgleichungen eine komfortable Lösungstheorie, aber Bequemlichkeit kann alleine natürlich kein Argument sein, zum anderen können nichtlineare dynamische Systeme unter gewissen Umständen lokal durch lineare angenähert werden. Die Nichtlinearität wird dann lokal quasi als (kleine) Störung des linearen dynamischen Systems interpretiert und mit den Methoden der Störungstheorie näherungsweise analysiert. Dies ist nicht immer möglich, insbesondere kann das System jenseits des störungstheoretischen Gültigkeitsbereiches in eine Regime eintreten, das die exakte Mitnahme aller nichtlinearen Beiträge (Wechselwirkungen) verlangt. Oft steht uns aber ein Kontrollparameter (Kopplung) zu Verfügung, der es lokal erlaubt, nichtlineare Aspekte als Deformationen des linearen dynamischen Systems zu betrachten, die dieses aber im üblichen störungstheoretischen Sinne respektieren. Salopp geschrieben können wir dann nichtlineare Störungen um die lokal dominante lineare Dynamik entwickeln.

Wir haben uns im letzten Abschnitt davon vergewissert, daß wir ein mechanisches System durch eine Differentialgleichung erster Ordnung repräsentieren können. Das **inhomogene Anfangswertproblem** für ein mechanisches System mit Phasenraum  $\mathbb{P}$  lautet

$$\dot{z}(t) = \mathcal{E}(t) z(t) + \alpha(t), \quad z(t_0) = z_0,\tag{2.81}$$

mit der **Systemmatrix**  $\mathcal{E} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$ , wobei  $\text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$  für  $\dim \mathbb{P} \in \mathbb{N}$  die Menge aller quadratischen Matrizen (mit  $\dim \mathbb{P}$  Zeilen) über dem reellen Zahlenkörper bezeichne, und der **Inhomogenität**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{P}$ ,  $t_0 \in I$  und  $z_0 \in \mathbb{P}$ .

Die Lösungsstrategie besteht darin, zunächst das zugehörige **homogene Anfangswertproblem** mit  $\alpha \equiv 0$ , also  $\dot{y}(t) = \mathcal{E}(t)y(t)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , zu lösen und dann das sogenannte Duhamel-Prinzip zu nutzen. Noch ohne allzu großes Verständnis, scheint für den Fall einer zeitlich konstanten Systemmatrix die Integration des homogenen Anfangswertproblems formal trivial zu sein: Für  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$y(t) = \exp((t - t_0)\mathcal{E})y_0\tag{2.82}$$

die Lösung des homogenen Anfangswertproblems, denn Anwendung der üblichen Differentiationsregel der Exponentialfunktion ergibt  $\dot{y} = \mathcal{E}y$ , außerdem ist in der Tat  $y(t_0) = y_0$ .

Nun ist aber  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$ . Zur Begründung von Gleichung (2.82) untersuchen wir jetzt matrixwertige Abbildungen für Vektorräume über dem reellen und über dem komplexen Zahlenkörper.

**Konzept 2.3.1 — Exponentialabbildung.** Es sei  $\mathcal{E} \in \text{Lin}(V)$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$ . Dann ist  $\text{Exp}(\mathcal{E}) \in \text{Lin}(V)$  definiert durch

$$\text{Exp}(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{a!} \mathcal{E}^{(a)} \quad (2.83)$$

mit  $\mathcal{E}^{(0)} = \text{id}_V$  und  $\mathcal{E}^{(a+1)} = \mathcal{E} \circ \mathcal{E}^{(a)}$ .

Hierbei bezeichnet  $\text{Lin}(V)$  den Raum der linearen Abbildungen von  $V$  in  $V$ . Analog wird das **Matrixexponential** von Matrizen in  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gebildet.

Sei  $V = \mathbb{K}^n$ , mit euklidischer Norm  $\|\cdot\|$ . Die **Operatornorm** auf  $\text{Lin}(\mathbb{K}^n)$

$$\|\mathcal{E}\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{v \in \mathbb{K}^n / \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{\|\mathcal{E}(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n : \|v\|=1} \|\mathcal{E}(v)\|, \quad \mathcal{E} \in \text{Lin}(V). \quad (2.84)$$

Die Operatornorm ist tatsächlich eine Norm: Ihr Wertebereich ist nach Definition  $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ . Als Supremum der Norm  $\|\cdot\|$  auf dem Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  ist die Operatornorm auf  $\text{Lin}(V)$  semi-positiv definit und genau dann Null, wenn  $\mathcal{E} = 0_{\mathbb{K}^n}$ . Wegen der positiven Homogenität von  $\|\cdot\|$  hat auch die Operatornorm diese Eigenschaft. Die Dreiecksungleichung für die Operatornorm folgt ebenfalls direkt aus der Dreiecksungleichung für  $\|\cdot\|$ . Sie ist zusätzlich **submultiplikativ**:

**Aussage 2.3.1** Für  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$  gilt:

$$\|\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} \leq \|\mathcal{E}_1\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} \|\mathcal{E}_2\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)}. \quad (2.85)$$

**Begründung:** Falls  $\mathcal{E}_1 = 0_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)}$  oder  $\mathcal{E}_2 = 0_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)}$ , so ist die Aussage trivial erfüllt. Seien also beide Endomorphismen von Null verschieden. Dann finden wir durch Erweitern ( $\mathcal{E}_2(v) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$  für  $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ )

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} &= \sup_{v \in \mathbb{K}^n / \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{\|(\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2)(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n / \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{\|\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2(v))\|}{\|v\|} \\ &= \sup_{v \in \mathbb{K}^n / \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{\|\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2(v))\|}{\|\mathcal{E}_2(v)\|} \frac{\|\mathcal{E}_2(v)\|}{\|v\|} \\ &\leq \sup_{w \in \mathbb{K}^n / \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{\|\mathcal{E}_1(w)\|}{\|w\|} \cdot \sup_{v \in \mathbb{K}^n / \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{\|\mathcal{E}_2(v)\|}{\|v\|} \\ &= \|\mathcal{E}_1\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} \|\mathcal{E}_2\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Damit ist nachgewiesen, daß die Operatornorm submultiplikativ ist. ■

Mit dem Konzept der Operatornorm ausgestattet, können wir nun zeigen, daß die Definition der Exponentialabbildung sinnvoll ist, also, daß die angegebene Potenzreihe konvergiert.



**Aussage 2.3.2** Für  $\mathcal{E} \in \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$  ist die Folge  $(s_a)_{a \in \mathbb{N}_0}$  der Partialsummen

$$s_a \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^a \frac{1}{\ell!} \mathcal{E}^{(\ell)} \quad (2.87)$$

von  $\text{Exp}(\mathcal{E})$  eine Cauchy-Folge in  $\text{Lin}(\mathbb{K}^n)$ .

**Begründung:** Ist Ihrer Inspiration überlassen. ■

Wir wollen nun zeigen, daß (2.82) das homogene Anfangswertproblem tatsächlich löst. Dazu ist es notwendig, die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{K}^n), \quad t \rightarrow \text{Exp}(t\mathcal{E}) \quad (2.88)$$

nach dem Zeitparameter zu differenzieren. Für diese Art von Fragestellung wertet wir die Exponentialabbildung für mehr als ein Argument aus, betrachten also die Abbildung

$$\text{Exp} : \text{Lin}(\mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{K}^n), \quad \mathcal{E} \rightarrow \text{Exp}(\mathcal{E}) \quad (2.89)$$

in ihrer Abhängigkeit vom Argument  $\mathcal{E}$ . Wir benötigen die

**Aussage 2.3.3 — Weierstraßsches Majorantenkriterium.** Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banach-Raum,  $X \subseteq V$  und  $f_\ell : X \rightarrow V$  ( $\ell \in \mathbb{N}_0$ ) seien Funktionen mit

$$\sup_{x \in X} \|f_\ell(x)\| \leq a_\ell, \quad \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} a_\ell < \infty. \quad (2.90)$$

Dann konvergiert die unendliche Reihe mit den  $f_\ell$  als Summanden gleichmäßig auf  $X$ .

**Begründung:** Nach Voraussetzung ist der metrische Raum  $V$  vollständig. Daher gilt

$$s_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\ell} f_m, \quad s(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} s_\ell(x) \quad (2.91)$$

punktweise für alle  $x \in X$ . Zu jedem  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  gibt es nach Voraussetzung ein  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{\ell=m+1}^n a_\ell < \varepsilon \quad (n > m) \curvearrowright \|s_n(x) - s_m(x)\| \leq \sum_{\ell=m+1}^n a_\ell < \varepsilon \quad (2.92)$$

für alle  $x \in X$ . Also konvergiert die unendlich Reihe gleichmäßig. ■

**Aussage 2.3.4 — Exponentialabbildung.** Für  $\mathcal{E} \in \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$  ist die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$ , erklärt durch  $t \rightarrow \text{Exp}(t\mathcal{E})$ , stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dt} \text{Exp}(t\mathcal{E}) = \mathcal{E} \circ \text{Exp}(t\mathcal{E}). \quad (2.93)$$

**Begründung:**

- (1) Setzen wir im Weierstraßschen Majorantenkriterium  $V := \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$  und  $f_\ell : X \rightarrow V$ ,  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{(\ell)}/(\ell!)$  ein, so gilt offenbar für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ , daß  $\sup_{\mathcal{M} \in V} \|f_\ell(\mathcal{M})\|_V = \infty$ . Wir können also im Weierstraßschen Majorantenkriterium als Definitionsbereich  $X$  nicht ganz  $V$  nehmen.

(2) Für die Vollkugel  $\{\mathcal{M} \in V : \|\mathcal{M}\|_V \leq r\} =: X$  mit Radius  $0 < r \in \mathbb{R}$  ist aber

$$a_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathcal{M} \in X} \|f_\ell(\cdot, \mathcal{M})\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} = \frac{1}{\ell!} \sup_{\mathcal{M} \in X} \left\| \mathcal{M}^{(\ell)} \right\|_{\text{Lin}(\mathbb{K}^n)} \leq \frac{r^\ell}{\ell!}, \quad (2.94)$$

und die unendliche Reihe mit den  $a_\ell$  als Summanden wird für jede Wahl von  $r$  durch  $\text{Exp}(r)$  majorisiert und konvergiert daher.

(3) Deshalb ist die Exponentialabbildung als Limes gleichmäßig konvergenter stetiger Funktionen (Partialsummen)  $s_\ell|_X : X \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$  auch stetig. Da die Ableitungen von  $s_\ell$  auf  $X$  ebenfalls gleichmäßig konvergent sind, ist die Exponentialabbildung auch differenzierbar. Somit ist Gleichung (2.93) korrekt, und aus ihr ergibt sich die Stetigkeit der Ableitung (die rechte Seite ist ja offenbar stetig).

Damit haben wir die stetige Differenzierbarkeit der Exponentialabbildung nachgewiesen. ■

Das homogene Anfangswertproblem wird also tatsächlich durch (2.82) für jedes  $\mathcal{E} \in \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$  gelöst, und der Phasenfluß der autonomen homogenen Differentialgleichung ist ( $t_0 = 0$ ) durch

$$y_{y_0}(t) = \Phi_t(y_0) = \text{Exp}(t\mathcal{E})y_0 \quad (2.95)$$

gegeben. Die Exponentialabbildung hat eine klare physikalische Interpretation: Sie ist der **Evolutionsoperator** des dynamischen Systems, beschreibt also dessen Zeitentwicklung in geschlossener Form, und erlaubt eine allgemeine Lösung dynamischer Systeme. Dieses erstaunliche Resultat ist von großer Tragweite in der gesamten Physik. Folkloristische Abhandlungen über mechanischer Systeme nehmen den Evolutionsoperator kaum (wenn überhaupt) zur Kenntnis. Nächstes Semester begegnet er Ihnen in der Quantenmechanik wieder in leicht aber wesentlich modifizierter Form. Wir können den Evolutionsoperator immer als geeignete Darstellung von temporalen Translationen im Zustandsraum des betrachteten physikalischen Systems verstehen (hier als Endomorphismus auf dem Phasenraum eines dynamischen Systems). Andere Theorien besitzen andere Zustandsräume und verlangen daher eine andere Darstellung von temporalen Translationen. Es ändert sich also lediglich die Darstellung, aber nicht das darzustellende Konzept.

Betrachten wir einmal ganz informell folgende Situation in Anlehnung an lokale Lösungsaussagen: Es sei  $\varepsilon := t/t_* \ll 1$  für eine beliebige Referenzzeit  $0 < t_* \in \mathbb{R}$ . Dann gilt in einer geeigneten Umgebung von  $y_0 \in \mathbb{P}$  wegen der stetigen Differenzierbarkeit des Evolutionsoperators  $y_{y_0}(t) = (\text{id}_{\mathbb{P}} + t\mathcal{E} + \mathcal{O}(\varepsilon^2))y_0$  für geeignete Zeiten. Dies weist  $\mathcal{E}$  als physikalischen Generator für temporale Translationen aus.

Aber ist das Konzept des Evolutionsoperators auch nützlich in den eher praktischen Gefilden unserer Unternehmungen? Wir kommen gleich auf Hilfsmittel zur Berechnung des Evolutionsoperators für konkrete dynamische Systeme zu sprechen. Für lineare dynamische Systeme erweist sich der Aufwand als akzeptabel, in allgemeineren Situationen aber als so inakzeptabel, daß wir gezwungen sind, den Evolutionsoperator auf eine Partialsumme zu reduzieren und unsere Betrachtungen bei gegebener Genauigkeit auf entsprechend adaptierte Bereiche im Phasenraum einzuschränken. Dies ist Inhalt der sogenannten Störungstheorie dynamischer Systeme und ein weites Feld. Der Verweis hierauf soll Aussagen entgegen treten, die bestimmte physikalische Theorien als nur rein störungstheoretisch verunglimpfen, aber den universellen Grund hierfür nicht sehen wollen: Wir sind bereits in

der Mechanik ganz schnell am Ende unserer Weisheit, nämlich wenn nichtlineare dynamische Systeme betrachtet werden. Der Evolutionsoperator als unendliche Reihe drängt uns Störungstheorie in der analytischen Behandlung solcher Systeme geradezu auf.

Für lineare dynamische Systeme gibt es recht potente (aber auch umfangreiche) Methoden, den Evolutionsoperator exakt zu berechnen. Zum Beispiel kann die Berechnung von  $\text{Exp}(t\mathcal{E})$  in diesem Fall mittels der Jordan-Normalform des Generators  $\mathcal{E}$  erfolgen. Es seien  $e_{a,b} \in \text{Mat}(r, \mathbb{K})$  ( $r \in \mathbb{N}, a, b \in \mathcal{I}(r)$ ) mit Koeffizienten  $(e_{a,b})_{cd} := \delta_{ac}\delta_{bd}$  für  $b, d \in \mathcal{I}(r)$ . Weiterhin setzen wir  $V_r := e_{1,2} + \cdots + e_{r-1,r}$ .

**Konzept 2.3.2 — Jordan-Block.** Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $r \in \mathbb{N}$  heißt

$$J_r(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{K})} + V_r \in \text{Mat}(r, \mathbb{K}) \quad (2.96)$$

der  $(r \times r)$ -**Jordan-Block mit Eigenwert  $\lambda$** .

Also ist  $J_r(0) = V_r$ , und der Jordan-Block kann auch suggestiv als  $J_r(\lambda) = J_r(0) + \lambda \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{K})}$  notiert werden.

**Konzept 2.3.3 — Jordan-Matrix.** Eine **Jordan-Matrix**  $J$  ist eine quadratische Matrix der Form

$$J = J_{r_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{r_k}(\lambda_k) \in \text{Mat}(r_1 + \cdots + r_k, \mathbb{K}) . \quad (2.97)$$

**Konzept 2.3.4 — Jordan-Basis.** Es sei  $\mathcal{A} \in \text{Lin}(V)$  ein linearer Operator auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ . Eine **Jordan-Basis** von  $\mathcal{A}$  ist eine Basis von  $V$ , in der  $\mathcal{A}$  durch eine Jordan-Matrix dargestellt wird.

**Aussage 2.3.5** Es sei  $\mathcal{A} \in \text{Lin}(V)$  ein linearer Operator auf einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$ . Dann gibt es eine Jordan-Basis von  $\mathcal{A}$ .

**Begründung:** Die Begründung braucht einiges an Vorwissen über Polynomringe und wird daher in den Anhang zu diesem Kapitel verschoben. ■

Im folgenden bezeichnen die darstellende Matrix mit dem selben Buchstaben wie den Operator  $\mathcal{A} \in \text{Lin}(V)$ . Da der Vektorraum  $V$  isomorph zu  $\mathbb{C}^{\dim(V)}$  ist, können wir die darstellende Matrix in der Form  $\mathcal{A} = WJW^{-1}$  schreiben, wobei  $J \in \text{Mat}(\dim(V), \mathbb{C})$  eine Jordan-Matrix ist und  $W \in GL(\dim(V), \mathbb{C})$ . Beachten Sie, daß wir wegen  $\text{Mat}(\dim(V), \mathbb{R}) \subset \text{Mat}(\dim(V), \mathbb{C})$  auch reelle quadratische Matrizen Jordan-diagonalisieren können, also mittels Ähnlichkeitstransformationen auf die Form einer Jordan-Matrix bringen können, aber die Jordan-Matrix ist dann im allgemeinen nicht mehr reell.

■ **Beispiel 2.6 — Jordan-Basis.** Es sei  $\mathcal{A} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{A} = -e_{12} + e_{21}$ . Diese Matrix hat keine reellen Eigenwerte, besitzt aber  $\pm i$  als komplexe Eigenwerte. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind  $v_+ := (i, 1)^T / \sqrt{2}$  und  $v_- := (-i, 1)^T / \sqrt{2}$ . Wir suchen die Matrix  $W \in GL(2, \mathbb{C})$ , die  $\mathcal{A}$  diagonalisiert. Für sie muß gelten, daß  $W^{-1}v_+ = (1, 0)^T =: e_1$  und  $W^{-1}v_- = (0, 1)^T =: e_2$ , wenn  $W^{-1}\mathcal{A}W = \text{diag}(i, -i)$ . Wir finden  $W^{-1} = (-ie_{11} + e_{12} + ie_{21} + e_{22}) / \sqrt{2}$  und  $W = (ie_{11} - ie_{12} + e_{21} + e_{22}) / \sqrt{2}$ . Es gibt zwei  $(1 \times 1)$ -Jordan-Blöcke  $J_1(\pm i)$ , und  $\mathcal{A}$  kann bezüglich der Basis  $\{e_1, e_2\}$  als Jordan-Matrix  $J = J_1(i) \oplus$

$J_1(-i)$  dargestellt werden:  $W^{-1}\mathcal{A}W = J$ . Also ist  $\{e_1, e_2\}$  eine Jordan-Basis. ■

Wie in diesem Beispiel ist mit jedem nicht reellen Eigenwert  $\lambda$  von  $\mathcal{A} \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  und Jordan-Block  $J_r(\lambda)$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) auch die komplex konjugierte Zahl  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $\mathcal{A}$  gleicher algebraischer Vielfachheit (das ist die Ordnung der entsprechenden Nullstelle des charakteristischen Polynoms) und es gibt einen Jordan-Block  $J_r(\bar{\lambda})$ .

**Aussage 2.3.6** Es sei  $\mathcal{A} \in \text{Mat}(\dim(V), \mathbb{R})$  die Matrixdarstellung eines linearen Operators auf einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$ , und  $W \in GL(\dim(V), \mathbb{C})$  so, daß  $W^{-1}\mathcal{A}W = J$  ist mit einer Jordan-Matrix  $J$ . Dann gilt für  $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Exp}(t\mathcal{A}) = W \text{Exp}(tJ) W^{-1}. \quad (2.98)$$

**Begründung:** Das folgt aus der Reihendarstellung des Matrixexponentials unter Benutzung von  $\mathcal{A}^a = (W J W^{-1})^a = W J^a W^{-1}$  für alle  $a \in \mathbb{N}$ . ■

Gilt für die Jordan-Matrix die Blockzerlegung  $J = J_{r_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{r_k}(\lambda_k)$  mit  $r_1 + \cdots + r_k = \dim(V)$  und Eigenwerten  $\lambda_a \in \mathbb{C}$  für  $a \in \mathcal{I}(k)$ , so ist das Matrixexponential

$$\text{Exp}(tJ) = \text{Exp}(tJ_{r_1}(\lambda_1)) \oplus \cdots \oplus \text{Exp}(tJ_{r_k}(\lambda_k)), \quad (2.99)$$

und es genügt, die  $\text{Exp}(tJ_{r_a}(\lambda_a))$  für  $a \in \mathcal{I}(k)$  zu berechnen. Weiterhin ist  $J_{r_a}(\lambda_a) = J_{r_a}(0) + \lambda_a \text{id}_{\text{Mat}(r_a, \mathbb{C})}$ . Offenbar kommutieren (vertauschen)  $J_{r_a}(0)$  und die Identität, was die Berechnung von  $\text{Exp}(tJ_{r_a}(\lambda_a))$  erleichtert, denn es gilt die

**Aussage 2.3.7** Es seien  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $\mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{B}$  (das heißt,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  vertauschen miteinander). Dann gilt

$$\text{Exp}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \text{Exp}(\mathcal{B}) \text{Exp}(\mathcal{C}). \quad (2.100)$$

**Begründung:** Mit der Definition des Matrixexponentials, der Voraussetzung, daß die Matrizen miteinander vertauschen, und dem binomischen Lehrsatz folgt durch direktes Ausrechnen

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) &= \sum_{a \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{a!} (\mathcal{B} + \mathcal{C})^a = \sum_{a \in \mathbb{N}_0} \sum_{j \in \mathcal{I}(a)} \binom{a}{j} \mathcal{B}^j \mathcal{C}^{a-j} \\ &= \sum_{a \in \mathbb{N}_0} \sum_{j \in \mathcal{I}(a)} \frac{1}{j!(a-j)!} \mathcal{B}^j \mathcal{C}^{a-j} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Da die Reihen absolut konvergent sind, können wir die Produktformel von Cauchy anwenden, woraus unmittelbar die Aussage folgt. ■

Beachten Sie, daß Vertauschbarkeit eine essentielle Voraussetzung ist und konstruieren Sie ein Gegenbeispiel mit nicht kommutierenden Matrizen.

**Aussage 2.3.8** Für alle  $\mathcal{A} \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$  ( $n \in \mathbb{N}$  gilt die Funktionalgleichung

$$\text{Exp}(t_1\mathcal{A}) \text{Exp}(t_2\mathcal{A}) = \text{Exp}((t_1 + t_2)\mathcal{A}) \quad (2.102)$$

für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

**Begründung:** Da  $\mathcal{A}$  mit sich selbst vertauscht, ist dies eine direkte Anwendung der Aussage 2.3.7 mit den Setzungen  $\mathcal{B} := t_1\mathcal{A}$  und  $\mathcal{C} := t_2\mathcal{A}$ . ■

Gegeben sei das dynamische System  $\dot{z} = \mathcal{E}z$  mit der Anfangsbedingung  $z(0) = z_0 \in \mathbb{P}$ , wobei  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ . Der zugehörige lineare Phasenfluß  $\Phi_t : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  auf dem Phasenraum  $\mathbb{P}$  des Systems ist durch  $\Phi_t(z) = \text{Exp}(t\mathcal{E})z_0$  erklärt. Die Aussage 2.3.8 bedeutet, daß der Phasenfluß eine Einparameter-Gruppe bildet, denn  $\Phi_0 = \text{id}_{\mathbb{P}}$  (Identität),  $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$  (Inverse) und  $\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}$  (Kompositionsregel).

Wir können unsere praktischen Betrachtungen weiter vorantreiben: Es sei wieder  $J \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  eine Jordan-Matrix mit den Jordan-Blöcken  $\{J_{r_a}(\lambda_a)\}_{a \in \mathcal{A}(k)}$ , wobei folgendes gilt:  $r_1 + \dots + r_k = n$ . Wie bereits festgestellt reduziert sich die Berechnung von  $\text{Exp}(tJ)$  auf die Berechnung der  $\text{Exp}(tJ_{r_a}(\lambda_a)) = \text{Exp}(tJ_{r_a}(0))\text{Exp}(t\lambda_a \text{id}_{\mathbb{P}})$ . Dies vereinfacht sich wegen  $\text{Exp}(t\lambda_a \text{id}_{\mathbb{P}}) = \exp(t\lambda_a) \text{id}_{\mathbb{P}}$  weiter. Mit der Bezeichnung  $I_a := \mathcal{I}(r_a)$  gilt

$$\text{Exp}(tJ_{r_a}(0)) = \sum_{\beta \in I_a} \sum_{\substack{\alpha \in I_a \\ \alpha \geq \beta}} \frac{t^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!} e^{\beta t} \cdot \quad (2.103)$$

Der Fall  $r_a = 1$  ist besonders einfach:  $\text{Exp}(tJ_1(0)) = 1$ .

Für  $\mathcal{A} \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  ist es oft sinnvoll, die **reelle Jordan-Normalform** von  $\text{Exp}(t\mathcal{A})$  zu verwenden. Für reelle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$  setzen wir  $J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := J_r(\lambda)$  ( $r \in \mathbb{N}$ ). Für  $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$  transformieren wir Paare von Jordan-Blöcken der Gestalt

$$\mathcal{J}_{2r} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

unter Benutzung von  $W \in GL(2r, \mathbb{C})$  mit

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} & \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} \\ (-i) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} & (i) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

in die reelle Normalform  $J_{2r}^{\mathbb{R}}(\lambda) := W \mathcal{J}_{2r} W^{-1}$ . Wegen  $J_r(\lambda) = J_r(0) + \lambda \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})}$  ist  $J_r(\lambda) + J_r(\bar{\lambda}) = 2J_r(0) + (\lambda + \bar{\lambda}) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} = 2(J_r(0) + \text{Re}(\lambda) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})}) = 2J_r(\text{Re}(\lambda))$ , und  $J_r(\lambda) - J_r(\bar{\lambda}) = (\lambda - \bar{\lambda}) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} = 2i \text{Im}(\lambda) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})}$ . Daher gilt für  $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

$$J_{2r}^{\mathbb{R}}(\lambda) = \begin{pmatrix} J_r(\text{Re}(\lambda)) & -\text{Im}(\lambda) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} \\ \text{Im}(\lambda) \text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{R})} & J_r(\text{Re}(\lambda)) \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(tJ_{2r}^{\mathbb{R}}(\lambda)) &= W \text{Exp}(t \mathcal{J}_{2r}^{\mathbb{R}}) W^{-1} \\ &= \exp(t \text{Re}(\lambda)) \begin{pmatrix} \cos(\text{Re}(\lambda)t) \text{Exp}(tJ_r(0)) & -\sin(\text{Re}(\lambda)t) \text{Exp}(tJ_r(0)) \\ \sin(\text{Re}(\lambda)t) \text{Exp}(tJ_r(0)) & \cos(\text{Re}(\lambda)t) \text{Exp}(tJ_r(0)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Wiederum ist der Fall einfacher Multiplizität  $r = 1$  besonders einfach:

$$\text{Exp}(tJ_2^{\mathbb{R}}(\lambda)) = \exp(t \text{Re}(\lambda)) \begin{pmatrix} \cos(\text{Re}(\lambda)t) & -\sin(\text{Re}(\lambda)t) \\ \sin(\text{Re}(\lambda)t) & \cos(\text{Re}(\lambda)t) \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

### 2.3.1 Explizit zeitabhängige lineare mechanische Systeme

Sei  $z : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  ein Kurvenabschnitt im Phasenraum  $\mathbb{P}$  eines mechanischen Systems und  $\mathcal{E} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$  eine stetige matrixwertige Abbildung auf dem Zeitintervall  $I$  mit  $t_0 \in I$ . Wir wenden uns nun dem homogenen, linearen, aber nichtautonomen Anfangswertproblem zu, dessen Lösung eine Bewegung des mechanischen Systems in  $\mathbb{P}$  mit  $z(t_0) = z_0$  ist:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{E}(t) z(t), \quad z(t_0) = z_0. \quad (2.109)$$

Da die Lösung dieses homogenen Differentialgleichungssystem linear von der Anfangsbedingung  $z_0$  abhängt, erhalten wir die allgemeine Lösung  $z_h$  in der Form

$$z_h(t) = \Phi(t, t_0) z_h(t_0) \quad (2.110)$$

mit dem **Lösungsoperator**  $\Phi : I \times I \rightarrow \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$ . Die Aussage inkludiert auch den autonomen Fall, für den der Lösungsoperator die folgende Gestalt hat:

$$\Phi(t, t_0) = \text{Exp}((t - t_0)\mathcal{E}). \quad (2.111)$$

Im Allgemeinen erfüllt der Lösungsoperator die Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathcal{E}(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \text{id}_{\mathbb{P}}. \quad (2.112)$$

Vertauschen die  $\mathcal{E}(t)$  zu unterschiedlichen Zeiten, das heißt gilt  $\mathcal{E}(t_1)\mathcal{E}(t_2) = \mathcal{E}(t_2)\mathcal{E}(t_1)$  für alle  $t_1, t_2 \in I$ , so ist der Lösungsoperator mit der korrekten Anfangsbedingung

$$\Phi(t, t_0) = \text{Exp}\left(\int_{[t_0, t]} ds \mathcal{E}(s)\right). \quad (2.113)$$

Sind  $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{P}$  Lösungen von  $\dot{z}(t) = \mathcal{E}(t) z(t)$  (dann offenbar zu unterschiedlichen Anfangswerten, denn das Anfangswertproblem (2.109) hat eine eindeutige Lösung) und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , so ist auch die Linearkombination  $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{P}$  eine Lösung der Differentialgleichung. Die Menge

$$\mathcal{L}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in C^1(I, \mathbb{P}) : \dot{\varphi}(t) = \mathcal{E}(t) \varphi(t), \quad t \in I\} \quad (2.114)$$

der Lösungen bildet also einen reellen Untervektorraum von  $C^1(I, \mathbb{P})$ , den **homogenen Lösungsraum**. Für  $t_0 \in I$  ist wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (2.109) die lineare Abbildung  $A_{t_0} : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{P}$ , erklärt durch  $\varphi \rightarrow \varphi(t_0)$ , ein Isomorphismus, also ist  $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\mathbb{P})$ .

Wir verallgemeinern nun das explizite zeitabhängige Anfangswertproblem um eine Inhomogenität  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow T\mathcal{P}$ . Der Name rührt daher, daß  $f$  weder von der Konfiguration eines mechanischen Systems noch von seinen Geschwindigkeiten abhängt, also gänzlich unabhängig von Phasenraumvariablen ist. In der Regel ist die Inhomogenität von der Form  $f = (0, a_{\text{ext}})$ , wobei  $a_{\text{ext}}$  dann die Interpretation einer extern verursachten Beschleunigung hat, die konfigurationsunabhängig ist. Mit anderen Worten, die Physik hinter  $a_{\text{ext}}$  wird nicht erfasst, das heißt  $a_{\text{ext}}$  ist nicht durch dynamische Freiheitsgrade des mechanischen Systems gegeben. Das inhomogene nichtautonome Anfangswertproblem lautet

$$\dot{z}(t) = \mathcal{E}(t) z(t) + f(t), \quad z(t_0) = z_0 \quad (2.115)$$

für Anfangszeiten  $t_0 \in I$ . Die Kenntnis des homogenen Lösungsoperators (2.111) ist ausreichend, um die allgemeine Lösung des inhomogenen nichtautonomen Anfangswertproblems anzugeben. Dazu eine kleine Überlegung: Wir erwarten, daß die Lösung linear von der Anfangsbedingung  $z_0$  und linear von der Inhomogenität abhängt. Daher machen wir für die Differenz der inhomogenen und homogenen Lösung folgenden funktionalen Ansatz:  $(t)z - (t)z_h =: (t)Z[f]$ , wobei  $Z$  eine zeitabhängige Funktion und ein lineares Funktional von der Inhomogenität ist, also

$$(t)Z[f] = \int_{[t_0, t]} ds (t)k(s) f(s) \quad (2.116)$$

für  $t \in I$  mit einer unbekannt temporal bilokalen Abbildung  $k : I \times I \rightarrow \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$ , deren Aufgabe es ist, die von der Inhomogenität verursachte Störung (relativ zum homogenen Problem) vom Zeitpunkt ihrer Erzeugung bis zum von uns gewählten Zeitpunkt vorwärts zu evolvieren. Je nach temporalen Träger der Inhomogenität kann diese für eine bestimmte (endliche) Dauer operativ sein. Da das Problem linear ist, beeinflussen sich Störungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten generiert werden, nicht. Daher integrieren wir einfach über alle möglichen Zeitpunkte, zu denen Störungen erzeugt werden können. Beachten Sie, daß  $(t)Z[0] = 0$  für alle  $t \in I$  und daher die homogene Lösung in diesem Fall reproduziert wird. Einsetzen des funktionalen Ansatzes in das inhomogene Anfangswertproblem liefert eine Bestimmungsgleichung für die unbekannt temporal bilokale Abbildung  $k$ :

$$f(t) = (t)k(t) f(t) + \int_{[t_0, t]} ds \partial_t(t)k(s) f(s) - \mathcal{E}(t)(t)Z[f]. \quad (2.117)$$

Also muß gelten, daß  $\partial_t(t)k(s) = \mathcal{E}(t)(t)k(s)$  mit  $(t)k(t) = \text{id}$ , was gerade die Bestimmungsgleichung für den homogenen Lösungsoperator ist. Wir fassen zusammen:

**Aussage 2.3.9 — Prinzip von Duhamel.** Die Lösung des inhomogenen nichtautonomen Anfangswertproblems (2.115) ist

$$(t)z = (t)\Phi(t_0) z_0 + \int_{[t_0, t]} ds (t)\Phi(s) f(s) \quad (2.118)$$

für alle  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .

Sei  $T_\varepsilon = T/(2\varepsilon)$  eine Testfunktion auf dem Intervall  $[t_0, t]$ . Zur Erinnerung:  $T$  ist glatt und besitzt einen kompakten Träger  $\text{supp } T \subset [t' - \varepsilon, t' + \varepsilon] \subset [t_0, t]$  mit  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ . Außerdem sei  $T(t') = 1$ . Wir setzen  $f =: T_\varepsilon \tilde{f}$  für alle  $s \in [t_0, t]$  und finden

$$(t)z = (t)\Phi(t_0) (t_0)z + \int_{[t' - \varepsilon, t' + \varepsilon]} ds (t)\Phi(s) (s) (T_\varepsilon \tilde{f}) \quad (2.119)$$

für alle  $\varepsilon > 0$  und alle Testfunktionen. Im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$(t)z = (t)\Phi(t_0) (t_0)z + (t)\Phi(t') (t')f, \quad (2.120)$$

was nochmals in prägnanter Form eine anschauliche Interpretation der Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems liefert. Der homogene Lösungsoperator (Evolutionoperator) holt die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt ihrer Setzung und die von der Inhomogenität erzeugte Störung (relativ zum homogenen Problem) zum Zeitpunkt ihrer Entstehung ab

und evolviert beide bis zu dem Zeitpunkt, der uns interessiert. Damit sind die Anfangsbedingung und die Störung gewissermaßen gleichberechtigt an der Lösung beteiligt.

Die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in C^1(I, \mathbb{P}) : \dot{\varphi}(t) = \mathcal{E}(t)\varphi(t) + f(t), t \in I \} \quad (2.121)$$

ist also von der Form  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_h + \varphi_p$  mit dem weiter oben definierten homogenen Lösungsraum  $\mathcal{L}_h$  und der sogenannten partikulären Lösung  $\varphi_p \in C^1(I, \mathbb{P})$ ,

$$({}^t)\varphi_p[f] = \int_{[t_0, t_1]} ds ({}^t)\Phi(s)(s)f. \quad (2.122)$$

Der inhomogene Lösungsraum  $\mathcal{L}$  ist somit ein affiner Unterraum von  $C^1(I, \mathbb{P})$ .

■ **Beispiel 2.7 — Der gedämpfte harmonische Oszillator.** Der eindimensionale gedämpfte harmonische Oszillator ist das inhomogene Anfangswertproblem  $\dot{z}(t) = \mathcal{E} z(t) + f(t)$ ,  $z(t_0) = z_0$  mit  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P} \cong \mathbb{E}^2$ ,  $z = (x, \dot{x})^T$ ,  $\mathcal{E} = e_{12} - \omega^2 e_{21} - \beta e_{22}$ , wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz des entsprechenden harmonischen Oszillators bezeichne,  $0 < \beta \in \mathbb{R}$  sei die Reibungskonstante (pro Masse des oszillierenden Partikelchens), und schließlich  $f = (0, a_{\text{ext}} \cos(\gamma t))^T$  die extern erzeugte Beschleunigung mit Frequenz  $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ . Der Phasenfluß wird von  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$  erzeugt, deren Eigenwerte durch

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \right) \quad (2.123)$$

gegeben sind. Daraus ergeben sich drei unterscheidbare Regime: Erstens,  $\omega > \beta$ . Das System führt gedämpfte Oszillationen aus. Die Dämpfung kommt durch den ersten Summanden der Eigenwerte  $\lambda_{\pm}$  zustande, die Oszillation wird von der imaginären Wurzel beschrieben. Natürlich erzeugt auch  $f$  Schwingungen, aber diese reflektieren sich nicht in den Eigenwerten von  $\mathcal{E}$ . Zweitens,  $\omega = \beta$ , der sogenannte aperiodische Grenzfall. Dieser ist durch die kleinste Reibungskonstante gegeben, für die das System gerade nicht mehr schwingt wenn  $f = 0_{\mathbb{E}^2}$ . Drittens,  $\omega < \beta$  ist der sogenannte überdämpfte Fall. Wir werden später sehen, daß in diesem Fall der Oszillator ohne äußere Anregung seine Gleichgewichtslage erst nach unendlich langer Zeit erreicht.

In diesem Beispiel betrachten wir lediglich den ersten Fall  $\omega > \beta$ , also die Oszillator-Lösung und holen die anderen beiden Fälle später nach. Dann sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\mathcal{E}$  folgendermaßen gegeben:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\beta \pm i\sqrt{4\omega^2 - \beta^2} \right), \quad v_{\pm} = (1, \lambda_{\pm})^T. \quad (2.124)$$

Die diagonalisierende Matrix  $W \in GL(2, \mathbb{C})$  ergibt sich aus der Forderung  $W^{-1}v_+ = (1, 0)^T$  und  $W^{-1}v_- = (0, 1)^T$ . Wir finden mit  $\delta := 1/(\lambda_+ - \lambda_-)$

$$W^{-1} = \delta \begin{pmatrix} -\lambda_- & +1 \\ +\lambda_+ & -1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

also  $W = (v_+, v_-)$ . Durch direkte (und elementare) Rechnung finden wir als Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} \text{Exp}(t\mathcal{E}) &= W \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_+) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_-) \end{pmatrix} W^{-1} \\ &= \delta \begin{pmatrix} -\lambda_- \exp(t\lambda_+) + \lambda_+ \exp(t\lambda_-) & \exp(t\lambda_+) - \exp(t\lambda_-) \\ \lambda_+ \lambda_- (-\exp(t\lambda_+) + \exp(t\lambda_-)) & \lambda_+ \exp(t\lambda_+) - \lambda_- \exp(t\lambda_-) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Wir führen folgend Bezeichnungen ein:  $D := -\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = \beta/2$  und  $\Omega := \pm\operatorname{Im}(\lambda_{\pm}) = \sqrt{4\omega^2 - \beta^2}/2$ . Damit ist  $\lambda_+ - \lambda_- = 2i\Omega$ , also  $\delta = -i/(2\Omega)$ . Für die Zeitentwicklung ohne äußere Anregung gilt (mit der Wahl  $t_0 = 0$ )

$$\begin{aligned}\Phi(t, 0) &= \operatorname{Exp}(t\mathcal{E}) \\ &= \exp(-tD) \begin{pmatrix} \frac{D}{\Omega} \sin(t\Omega) + \cos(t\Omega) & \frac{1}{\Omega} \sin(t\Omega) \\ -\frac{D^2 + \Omega^2}{\Omega} \sin(t\Omega) & -\frac{D}{\Omega} \sin(t\Omega) + \cos(t\Omega) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Bevor wir fortfahren, lassen Sie uns aus diesem Ergebnis die Zeitentwicklung  $\Phi_{\text{harm}}$  des harmonischen Oszillators extrahieren. Diese erhalten wir für  $D = 0$ :

$$\Phi_{\text{harm}}(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{1}{\omega} \sin(t\omega) \\ -\omega \sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.127)$$

was offenbar das korrekte Resultat ist. Beachten Sie, daß  $\operatorname{Det} \Phi_{\text{harm}}(t, 0) = 1$  für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$ . Bleiben wir noch beim reibungsfreien Fall ( $D = 0$ ), aber lassen eine äußere Anregung der Form  $f(t) = (0, a_{\text{ext}} \cos(t\gamma))^T$  zu. Das Prinzip von Duhamel ergibt in diesem Fall

$$z_{\text{rf}}(t) = z_{\text{harm}}(t) + \frac{a_{\text{ext}}}{\omega^2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} \cos(t\gamma) - \cos(t\omega) \\ \omega \sin(t\omega) - \gamma \sin(t\gamma) \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

wobei  $z_{\text{harm}}$  die harmonische Lösung ohne äußere Anregung bezeichne. Insbesondere ist dessen Amplitude für alle Zeiten und alle Parameter des Oszillators beschränkt. Dies gilt nicht mehr für den getriebenen reibungsfreien Oszillator. Die (kausale) Evolution der äußeren Anregung liefert einen Beitrag, der für  $\gamma = \omega$ , also wenn die Anregungsfrequenz mit der charakteristischen Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators übereinstimmt, mit der Zeit unbeschränkt anwächst. Die relative Auslenkung (Amplitude) des Oszillators ist aber eine Beobachtungsgröße. Damit weist dieses Verhalten auf einen Zusammenbruch unserer Beschreibung hin, die ja auf der Gültigkeit eines linearen Kraftgesetzes (nach Hooke) beruht. Also bricht die lineare Beschreibung zusammen. Phänomene dieser Art (Resonanz und Resonanzkatastrophe) konnten in der Geschichte oft unter tragischen Umständen direkt nachgewiesen werden.

Wir kommen nun zum angeregten Oszillator mit Dämpfung. Der Einfachheit halber wählen wir  $z(0) = z_0 = (A, 0)^T$  mit  $A \in \mathcal{E}$ . Für den Fall ohne Anregung entnehmen wir dem Zeitentwicklungsoperator (2.126) die Lösung

$$x_{\text{ua}}(t) = A \exp(-tD) \left( \frac{D}{\Omega} \sin(t\Omega) + \cos(t\Omega) \right). \quad (2.129)$$

Das Prinzip von Duhamel gibt für den Fall mit Anregung nach einer längeren Rechnung

$$\begin{aligned}x(t) &= x_{\text{ua}}(t) - \frac{1}{2} \frac{a_{\text{ext}}}{\Omega} \exp(-tD) \left\{ \frac{D \sin(t\Omega) + (\Omega - \gamma) \cos(t\Omega)}{D^2 + (\Omega - \gamma)^2} + (\gamma \rightarrow -\gamma) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a_{\text{ext}}}{\Omega} \left\{ \frac{D \sin(t\gamma) + (\Omega - \gamma) \cos(t\gamma)}{D^2 + (\Omega - \gamma)^2} + (\gamma \rightarrow -\gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Die erste Zeile dieser Lösung beschreibt gedämpfte Schwingungen mit der Frequenz  $\Omega$ , in der ja die beiden den Oszillator charakterisierenden Frequenzen, nämlich die Kreisfrequenz des harmonischen Anteils und die Dämpfungsrate, eingehen. Für asymptotisch

große Zeiten  $t/t_* \rightarrow \infty$  (mit einer beliebigen Referenzzeit  $0 < t_* \in \mathbb{R}$ ) werden diese Schwingungen aufgrund der Dämpfung weggedämpft, auch wenn wir angenommen haben, daß die Dämpfung subdominant ist im Sinne von  $\omega > \beta$ . Deswegen kommt es überhaupt zu Schwingungen, nur gewinnt über die Zeit hinweg die Dämpfung die Oberhand. Allerdings kommt dieser Oszillator bei angeschalteter Anregung nie zu Ruhe. Die zweite Zeile der Lösung beschreibt ein durch die Anregungsfrequenz gegebenes Schwingverhalten, welches sich als persistent gegenüber der Dämpfung erweist und damit auch asymptotisch besteht. Der Grund für diese Persistenz ist folgender: Sowohl die Kreisfrequenz des harmonischen Oszillators als auch die Dämpfungsrate sind interne Kenngrößen des Oszillators und beeinflussen daher die intrinsische Dynamik desselben, während die Anregungsfrequenz ein externer Parameter ist, der eine aufgezwungene Beschleunigung des Oszillators charakterisiert und zwar unabhängig von dessen Phasenraumkonfiguration. Der Oszillator hat keine Möglichkeit, auf die Ursache dieser externen Beschleunigung rückzuwirken, oder der Effekt einer solchen Rückwirkung ist aus apparativen Gründen im Vergleich zur Meßgenauigkeit vernachlässigbar. Andernfalls käme keine vom Phasenraumpunkt unabhängige Anregung in Frage. Daher kann also keine intrinsische Eigenschaft des Oszillators eine Auswirkung auf die externe Anregung haben, weswegen diese immer eine Oszillation verursacht, die sich nicht wegdamfen läßt. Aber die charakteristische Frequenz dieser Oszillation ist eben von der Kreisfrequenz unabhängig und durch die Anregungsfrequenz alleine gegeben. Lediglich die Amplitude weist eine Abhängigkeit von der Kreisfrequenz auf. ■

Lassen Sie uns am Ende des Kapitels noch einige Worte über die Botanik linearer Flüsse loswerden. Gegeben sei ein dynamisches System  $\dot{z} = \mathcal{L} z$  im Phasenraum  $\mathbb{P}$ , also  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$ . Wir haben gelernt, daß  $\mathcal{L} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  den Phasenfluß auf  $\mathbb{P}$  folgendermaßen erzeugt:

$$\Phi_t : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}, \quad z \mapsto \text{Exp}(t\mathcal{L}) z \quad (2.131)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  (oder eines Intervalls in  $\mathbb{R}$ ). Lassen Sie uns unser Verständnis hiervon vertiefen. Dafür betrachten wir Phasenportraits von dynamischen Systemen  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , also die Zerlegung des Phasenraums  $\mathbb{P}$  in Orbits.

Eine grundlegende Idee der Theorie dynamischer Systeme ist es gleich ganze Klassen von ähnlichen Systemen zu analysieren. Dabei stellt sich die Frage, was hiermit eigentlich genau gemeint ist. Gegeben seien zwei dynamische Systeme auf den Phasenräumen  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{P}'$  mit Flüssen  $\Phi$  und  $\Phi'$ . Das Konzept der Ähnlichkeit zweier solcher dynamischer Systeme beruht (zunächst) auf dem Begriff der Konjugation, der sich leicht auf Phasenflüsse übertragen läßt.

**Konzept 2.3.5 —  $C^j$ -konjugiert.** Zwei  $C^k$ -Phasenflüsse  $\Phi, \Phi'$  auf Phasenräumen  $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$  mit  $1 \leq k \in \mathbb{N} \leq \infty$  heißen **topologisch konjugiert** oder  **$C^0$ -konjugiert**, wenn es einen Homöomorphismus  $h: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  derart gibt, daß für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  folgendes gilt:

$$\Phi_t = h^{-1} \circ \Phi'_t \circ h. \quad (2.132)$$

Für  $1 \leq k \in \mathbb{N}$  heißen zwei  $C^k$ -Diffeomorphismen  $\Phi$  und  $\Phi'$  auf Phasenräumen  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{P}'$  allgemeiner  **$C^j$ -konjugiert** mit  $1 \leq j \in \mathbb{N} \leq \infty$ , wenn es einen  $C^j$ -Diffeomorphismus  $h: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  derart gibt, daß für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:  $\Phi_t = h^{-1} \circ \Phi'_t \circ h$ .

Wir wollen nun untersuchen, was dies für die den Phasenfluß erzeugenden Vektorfelder bedeutet. Es seien  $(\mathbb{P}^{(1)}, \Phi^{(1)})$  und  $(\mathbb{P}^{(2)}, \Phi^{(2)})$  zwei dynamische Systeme mit den erzeugenden Vektorfeldern

$$V^{(a)} : \mathbb{P}^{(a)} \rightarrow T\mathbb{P}^{(a)}, \quad z \mapsto V^{(a)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \left( \Phi_t^{(a)} z \right) \right|_{t=0} = \mathcal{E}^{(a)} z \quad (2.133)$$

mit  $\mathcal{E}^{(a)} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}^{(a)}, \mathbb{R})$  für  $a \in \{1, 2\}$ . Weiterhin sei  $h$  ein Diffeomorphismus, also  $h \in C^1(\mathbb{P}^{(1)}, \mathbb{P}^{(2)})$  und  $h^{-1} \in C^1(\mathbb{P}^{(2)}, \mathbb{P}^{(1)})$ . Die dynamischen Systeme  $(\mathbb{P}^{(1)}, \Phi^{(1)})$  und  $(\mathbb{P}^{(2)}, \Phi^{(2)})$  seien mittels  $h$  sogar  $C^1$ -konjugiert, weswegen für alle  $z \in \mathbb{P}^{(1)}$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} V^{(2)}(h(z)) &= \left. \frac{d}{dt} \left( \Phi_t^{(2)} h(z) \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( h \left( \Phi_t^{(1)}(z) \right) \right) \right|_{t=0} = (Dh) V^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (2.134)$$

Mit anderen Worten, für alle  $z \in \mathbb{P}^{(1)}$  gilt

$$V^{(2)} = (Dh) \circ V^{(1)} \circ h^{-1}. \quad (2.135)$$

Dies können wir als lineare Version der Qualifikation verstehen, daß die betrachteten dynamischen Systeme  $C^1$ -konjugiert sind. Daher gilt: Ist  $z_* \in \mathbb{P}^{(1)}$  eine Ruhelage von  $\Phi^{(1)}$ , dann ist auch  $h(z_*) \in \mathbb{P}^{(2)}$  eine Ruhelage von  $\Phi^{(2)}$ .

■ **Beispiel 2.8 — Lineare Differentialgleichung auf  $\mathbb{R}$ .** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  betrachten wir die lineare Differentialgleichung  $\dot{x} = \alpha x$  auf  $\mathbb{R}$ . Der zugehörige Phasenfluß ist  $\Phi_t^{(\alpha)}(x) = \exp(t\alpha)x$ . Offenbar ist der Ursprung  $x = 0$  für alle Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Ruhelage. Für  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$  ist das asymptotische Verhalten des Phasenflusses aber parameterabhängig:

1. Für  $\alpha < 0$  ist

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = 0. \quad (2.136)$$

Also gibt es kein  $y \in \mathbb{R}/\{0\}$  in der asymptotischen Vergangenheit (effektiv Zukunft, da  $\alpha < 0$ ), das zu  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$  evolviert sein könnte, und alle  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$  evolviert zur Null in der asymptotischen Zukunft (effektiv Vergangenheit, da  $\alpha < 0$ ).

2. Für  $\alpha = 0$  ist

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = x, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = x, \quad (2.137)$$

da  $\Phi^{(0)} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . Tatsächlich wird in diesem Fall keine Evolution generiert.

3. Für  $\alpha > 0$  ist

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = \infty. \quad (2.138)$$

Alle Punkte  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$  evolviert zur Null in der asymptotischen Vergangenheit und erreichen keinen Punkt  $y \in \mathbb{R}/\{0\}$  in der asymptotischen Zukunft.

Folglich können  $\Phi^{(\alpha)}$  und  $\Phi^{(\beta)}$  höchstens dann topologisch konjugiert sein, wenn  $\text{Sign}(\alpha) = \text{Sign}(\beta)$  gilt. Dann sind sie aber wirklich konjugiert. Sind nämlich  $\alpha$  und  $\beta$  beide positiv oder beide negativ, dann können wir den für  $a > 0$  definierten Homöomorphismus

$$h_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \text{Sign}(x) |x|^a \quad (2.139)$$

von  $\mathbb{R}$  benutzen. Es ist  $h_a^{-1} = h_{1/a}$ , und daher für  $a := \beta/\alpha > 0$

$$\begin{aligned} (h_a \circ \Phi_t^{(\alpha)} \circ h_a^{-1})(x) &= h_a \left( \exp(t\alpha) \text{Sign}(x) |x|^{1/a} \right) \\ &= \text{Sign}(x) \left( \exp(t\alpha) |x|^{1/a} \right)^a = \exp(t\beta)x \\ &= \Phi_t^{(\beta)}(x). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Beachten Sie, daß dieser konjugierende Homöomorphismus außer an der Stelle Null glatt ist. Als wichtiges Ergebnis erhalten wir, daß der durch  $\alpha \in \mathbb{R}$  parametrisierte eindimensionale Parameterraum der eindimensionalen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = \alpha x$  in drei Äquivalenzklassen zueinander konjugierter Systeme zerlegt wird. ■

Wir verallgemeinern jetzt auf beliebige Dimensionen.

### Konzept 2.3.6 — Hyperbolisch, Index & (in)stabiler Unterraum.

(1) Eine Matrix  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$ , das Vektorfeld  $z \rightarrow \mathcal{E}z \in T\mathbb{P}$  und der Phasenfluß  $(t, z) \mapsto \Phi_t(z) = \text{Exp}(t\mathcal{E})z \in \mathbb{P}$  heißen **hyperbolisch**, wenn für alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $\mathcal{E}$  gilt:  $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ .

(2) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(\lambda) < 0$  heißt der **Index** von  $\mathcal{E}$  und wird mit  $\text{Ind}(\mathcal{E})$  notiert.

(3) Es seien

$$\begin{aligned} E_s &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{P} : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(z) = 0 \right\}, \\ E_u &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{P} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(z) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Die Unterräume  $E_s$  und  $E_u$  heißen stabiler und instabiler Unterraum von  $\mathcal{E}$ .

**Aussage 2.3.10** Die Menge der hyperbolischen Matrizen in  $\text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  ist offen und dicht.

### Begründung:

1. Es sei  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  hyperbolisch und  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Also ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $\mathcal{E}$ , und es gilt  $I(\mathcal{E}) := \text{Inf}\{|\text{Det}(\mathcal{E} - \lambda \text{id}_{\mathbb{P}})| : \lambda \in i\mathbb{R}\} > 0$ . Da die Abbildung  $\text{Det} : \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist, gibt es  $\Lambda > 0$  und eine Umgebung  $U \subset \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  von  $\mathcal{E}$  mit  $I(B) := \text{Inf}\{|\text{Det}(\mathcal{B} - \lambda \text{id}_{\mathbb{P}})| : \lambda \in i\mathbb{R}, |\lambda| \leq \Lambda\} > 0$  für  $B \in U$ . Die Matrizen  $B \in U$  sind also auch hyperbolisch.

2. Es sei  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  nicht hyperbolisch. Dann ist für  $c \in \mathbb{R}$  die Matrix  $\mathcal{E} + c \text{id}_{\mathbb{P}} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  hyperbolisch, falls  $|c| \in (0, C)$  mit

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \text{Inf}\{|\text{Re}(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } \mathcal{E}, \text{Re}(\lambda) \neq 0\} \in (0, \infty). \quad (2.142)$$

Die Menge dieser Matrizen besitzt  $\mathcal{E}$  als Häufungspunkt. ■

Lassen Sie uns ein wenig vorausschauen: Typischerweise sind Matrizen in  $\text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  hyperbolisch. Dies gilt allerdings nicht mehr, wenn wir uns auf den Untervektorraum der

in der Klassischen Mechanik nach Hamilton auftretenden infinitesimal symplektischen Matrizen beziehen.

Eine Matrix  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  ist genau dann hyperbolisch  $\text{Ind}(\mathcal{E}) + \text{Ind}(-\mathcal{E}) = \text{Dim } \mathbb{P}$ . Im letzten Beispiel waren die hyperbolischen dynamischen Systeme mit gleichem Index zueinander konjugiert. Diese Einsicht verallgemeinern wir gleich auf beliebige Dimensionen.

**Aussage 2.3.11** Der Index einer hyperbolischen Matrix ist gleich der Dimension ihres stabilen Unterraums.

**Begründung:**

1. Es sei  $\mathcal{E}$  eine hyperbolische Matrix und  $z \in \mathbb{P}$  ein Element der direkten Summe der Eigenräume zu den Eigenwerten  $\lambda_a$  ( $a \in \mathcal{S}(k)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  geeignet) mit  $\text{Re}(\lambda_a) < 0$ . Dann sind die Komponenten der vektorwertigen Funktion  $t \rightarrow \Phi_t(z)$  Summe von  $\lambda_a$ -Quasipolynomen, also  $z \in E^s$ . Damit ist  $\text{Dim}(E^s) \geq \text{Ind}(\mathcal{E})$ .
2. Andererseits führt die analoge Argumentation für Eigenwerte mit positivem Realteil zu  $\text{Dim}(E^u) \geq \text{Ind}(-\mathcal{E}) = \text{Dim}(\mathbb{P}) - \text{Ind}(\mathcal{E})$ , denn  $\mathcal{E}$  ist ja nach Voraussetzung hyperbolisch, und das notwendige und hinreichende Kriterium hierfür ist (siehe oben)  $\text{Ind}(\mathcal{E}) + \text{Ind}(-\mathcal{E}) = \text{Dim } \mathbb{P}$ .
3. Für jede Summe  $f(t) := p_a(t) \exp(t\lambda_a)$  von  $\lambda_a$ -Quasipolynomen gilt: Falls  $f(t) \rightarrow 0$  für sowohl  $t \rightarrow \infty$  also auch  $t \rightarrow -\infty$ , dann muß  $f \equiv 0$  gelten. Daher ist  $E^s \cap E^u = \{0\}$  und damit  $\text{Dim}(E^s) + \text{Dim}(E^u) = \text{Dim}(\mathbb{P})$ , was  $\text{Dim}(E^s) = \text{Ind}(\mathcal{E})$  und  $\text{Dim}(E^u) = \text{Dim}(\mathbb{P}) - \text{Ind}(\mathcal{E})$  impliziert, wie eine kleine Rechnung zeigt: Zunächst folgt aus der 2. gefunden Relationen durch Einsetzen von  $\text{Dim}(E^s) + \text{Dim}(E^u) = \text{Dim}(\mathbb{P})$ , daß  $0 \geq \text{Dim}(E^s) - \text{Ind}(\mathcal{E})$ . Wegen 1. kann diese Differenz aber nicht kleiner Null sein, also muß sie gleich Null sein. Somit  $\text{Dim}(E^s) = \text{Ind}(\mathcal{E})$ , woraus dann  $\text{Dim}(E^u) = \text{Dim}(\mathbb{P}) - \text{Ind}(\mathcal{E})$  wegen  $\text{Dim}(E^s) + \text{Dim}(E^u) = \text{Dim}(\mathbb{P})$  folgt. ■

**Aussage 2.3.12** Es sei  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  und  $\Lambda := \text{Max}\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \text{ ist Eigenwert}\}$ . Dann gibt es für alle  $\Lambda' > \Lambda$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{P}$ , für dessen Norm folgendes gilt:

$$\frac{d}{dt} \|\Phi_t(z)\| \leq \Lambda' \|\Phi_t(z)\| \quad (2.143)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{P}$ .

**Begründung:** Wegen

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(z) = \frac{d}{ds} \Phi_{t+s}(z)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Phi_s(y)|_{s=0} \quad (2.144)$$

mit  $y := \Phi_t(z)$  genügt es, die Ungleichung (2.143) für  $t = 0$  nachzuweisen.

1. Offenbar gilt die Ungleichung (2.143) für  $z = 0_{\mathbb{P}}$ . Daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $z \in \mathbb{P}/\{0_{\mathbb{P}}\}$ . Wir zeigen, daß für ein geeignetes Skalarprodukt auf dem komplexifizierten Phasenraum  $\mathbb{P}^{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^{\text{Dim } \mathbb{P}}$  gilt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \text{Exp}(t\mathcal{E})z, \text{Exp}(t\mathcal{E})z \rangle|_{t=0} \leq \Lambda' \langle z, z \rangle \quad (2.145)$$

für alle  $z \in \mathbb{P}^{\mathbb{C}}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß der Basiswechsel zur Jordan–Normalform bereits vollzogen ist. Es ist

$$\frac{d}{dt} \langle \text{Exp}(t\mathcal{E})z, \text{Exp}(t\mathcal{E})z \rangle|_{t=0} = 2\text{Re}(\langle z, \mathcal{E}z \rangle). \quad (2.146)$$

2. Wählen wir das Skalarprodukt derart, daß die Unterräume zu den unterschiedlichen Jordan–Blöcken orthogonal sind, so ist dieser Ausdruck gerade die Summe über die Beträge der Jordan–Blöcke. Mit dem Jordan–Block  $J_r(\lambda)$  für den (komplexen) Eigenwert  $\lambda$  ist für  $\text{Re}(\lambda) \leq \Lambda$

$$\text{Re}(\langle z, J_r(\lambda)z \rangle) = \text{Re}(\langle z, J_r(\text{Re}(\lambda))z \rangle). \quad (2.147)$$

3. Für  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  konjugieren wir  $J_r(\text{Re}(\lambda)) = \text{Re}(\lambda)\text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{C})} + J_r(0)$  mit der Diagonalmatrix  $D_\varepsilon := \text{Diag}(\varepsilon^0, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{r-1}) \in GL(r, \mathbb{C})$ , wobei offenbar  $D_\varepsilon^{-1} = D_{1/\varepsilon}$ . Es ist  $D_\varepsilon^{-1} J_r(\text{Re}(\lambda)) D_\varepsilon = \text{Re}(\lambda)\text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{C})} + \varepsilon J_r(0)$ . Mit anderen Worten, die Nebendiagonale wurde mit  $\varepsilon$  multipliziert. Wir bezeichnen das kanonische Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^r$  mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{kan}}$ . Die Ungleichung von Cauchy und Schwarz impliziert

$$\text{Re}(\langle z, J_r(0)z \rangle_{\text{kan}}) \leq \|z\|_{\text{kan}} \|J_r(0)z\|_{\text{kan}} \leq \|z\|_{\text{kan}}^2. \quad (2.148)$$

Somit gilt für  $\varepsilon \in (0, \Lambda' - \Lambda)$

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\langle z, (\text{Re}(\lambda)\text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{C})} + \varepsilon J_r(0))z \rangle_{\text{kan}}) \\ &= \text{Re}(\lambda) \|z\|_{\text{kan}}^2 + \varepsilon \text{Re}(\langle z, J_r(0)z \rangle_{\text{kan}}) \\ &\leq (\text{Re}(\lambda) + \varepsilon) \|z\|_{\text{kan}}^2 \leq (\Lambda + \varepsilon) \|z\|_{\text{kan}}^2 \leq \Lambda' \|z\|_{\text{kan}}^2. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Also definieren wir das gesuchte Skalarprodukt durch  $\langle y, z \rangle := \langle D_\varepsilon^{-1}y, D_\varepsilon^{-1}z \rangle_{\text{kan}}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \langle z, J_r(\text{Re}(\lambda))z \rangle &= \langle D_\varepsilon^{-1}z, (\text{Re}(\lambda)\text{id}_{\text{Mat}(r, \mathbb{C})} + \varepsilon J_r(0)) D_\varepsilon^{-1}z \rangle_{\text{kan}} \\ &\leq \Lambda' \|D_\varepsilon^{-1}z\|_{\text{kan}}^2 = \Lambda' \|z\|^2. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Insgesamt haben wir gefunden, daß

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\text{Exp}(t\mathcal{E})z\|^2|_{t=0} \leq \Lambda' \|z\|^2. \quad (2.151)$$

Damit ist die Aussage vollständig begründet. ■

**Aussage 2.3.13 — Konjugationsklassen.** Die linearen Flüsse zweier hyperbolischer Generatoren  $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R})$  sind genau dann konjugiert, wenn gilt

$$\text{Ind}(\mathcal{E}^{(1)}) = \text{Ind}(\mathcal{E}^{(2)}). \quad (2.152)$$

**Begründung:** Wie gewohnt bezeichnen wir die von den hyperbolischen Generatoren erzeugten linearen Phasenflüsse mit

$$\Phi_t^{(a)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Exp}(t\mathcal{E}^{(a)})z, \quad (2.153)$$

wobei  $a \in \mathcal{I}(2)$ , und deren stabilen Unterräume mit  $E^s(a)$ . Die Abbildungen  $\|\cdot\|^{(a)} : E^s(a) \rightarrow [0, \infty)$  bezeichnen Normen auf den jeweiligen stabilen Unterräumen, die die Ungleichung (2.143) für ein  $\Lambda < 0$  erfüllen.

1.  $\curvearrowright$ : Existiert ein konjugierender Homöomorphismus  $h : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , dann gilt  $h(0) = 0$ , also bildet dieser Ruhelagen in Ruhelagen ab, und auch  $h(E^s(1)) = E^s(2)$ , denn die Punkte  $z \in E^s(1)$  haben die definierende Eigenschaft, daß sie in der asymptotischen Zukunft die Ruhelage erreichen. Homöomorphismen lassen die Dimension von Vektorräumen invariant. Gelingt uns die Existenz einer Konjugation  $h$  zu zeigen, so folgt daher

$$\begin{aligned} \text{Ind} \left( \mathcal{E}^{(1)} \right) &= \text{Dim} \left( E^s(1) \right) = \text{Dim} \left( h \left( E^s(1) \right) \right) = \\ &= \text{Dim} \left( E^s(2) \right) = \text{Ind} \left( \mathcal{E}^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (2.154)$$

2.  $\curvearrowleft$ : Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß  $\text{Ind} \left( \mathcal{E}^{(1)} \right) = \text{Ind} \left( \mathcal{E}^{(2)} \right)$  und konstruieren einen konjugierenden Homöomorphismus  $h$ . Da beide Phasenräume direkte Summen ihrer stabilen und instabilen Unterräume sind, schreiben wir bezüglich dieser Zerlegung den Homöomorphismus in der Form  $h = (h^s, h^u)$ , wobei  $h^s : E^s(1) \rightarrow E^s(2)$  und entsprechend bildet  $h^u$  die instabilen Unterräume aufeinander ab.
3. Wir definieren  $h^s$  und zeigen, daß die Abbildung ein Homöomorphismus ist. Zunächst muß  $h^s(0) = 0$  gelten, denn Ruhelagen werden auf Ruhelagen abgebildet. Definitionsgemäß gilt für  $z \in E^s(1)$ , daß  $\Phi_t^{(1)}(z) = 0$  in der asymptotischen Zukunft und  $\left\| \Phi_t^{(1)}(z) \right\|^{(1)} \rightarrow \infty$  in der asymptotischen Vergangenheit. Die Aussage 2.3.12 impliziert, daß es genau eine Zeit  $T(z) \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\Phi_{T(z)}^{(1)} \in \mathcal{S}^{(1)}$ , wobei  $\mathcal{S}^{(1)}$  die Einheitskugel in  $E^s(1)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|^{(1)}$  ist. Die Funktion  $T : E^s(1)/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist glatt. Ähnlich bezeichnet  $\mathcal{S}^{(2)}$  die Einheitskugel in  $E^s(2)$ . Da die beiden reellen Vektorräume  $E^s(1)$  und  $E^s(2)$  die gleiche Dimension besitzen, gibt es einen Isomorphismus  $\iota : E^s(1) \rightarrow E^s(2)$ , und entsprechend einen Diffeomorphismus  $\hat{\iota} : \mathcal{S}^{(1)} \rightarrow \mathcal{S}^{(2)}$ , der durch  $z \mapsto \iota(z)/\|z\|^{(2)}$  erklärt ist. Wir setzen

$$h^s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{-T(z)}^{(2)} \left( \hat{\iota} \left( \Phi_{T(z)}^{(1)}(z) \right) \right) \quad (2.155)$$

für alle  $z \in E^s(1)/\{0\}$ . Als Komposition glatter Abbildungen ist  $h^s$  auf  $E^s(1)/\{0\}$  glatt. Außerdem gilt  $h^s(z) \rightarrow 0_{E^s(2)}$ . Analoge Aussagen gelten für die Umkehrabbildung von  $h^s$ . Damit ist  $h^s$  ein Homöomorphismus.

Genauso gehen wir für  $h^u$  vor, allerdings werden die Systemmatrizen (Erzeuger der Evolution) mit  $-1$  multipliziert. Insgesamt finden wir so, daß  $h = (h^s, h^u)$  ein Homöomorphismus ist.

4. Es bleibt zu zeigen, daß  $h$  die linearen Phasenflüsse konjugiert. Zunächst gilt für alle  $z \in E^s(1)/\{0\}$  und  $x := \Phi_s^{(1)}(z)$

$$\Phi_{T(z)-s}^{(1)}(x) = \Phi_{T(z)}^{(1)} \left( \Phi_{-s}^{(1)}(x) \right) = \Phi_{T(z)}^{(1)}(z). \quad (2.156)$$

Offenbar ist  $\Phi_{T(z)}^{(1)}(z) \in \mathcal{S}^{(1)}$  und daher  $\Phi_{T(z)-s}^{(1)}(x) \in \mathcal{S}^{(1)}$ , also  $T(x) = T(z) - s$ .

Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und (zunächst nur)  $z \in E^s(1)$  ist

$$\begin{aligned}
 \Phi_t^{(2)}(h^s(z)) &= \Phi_t^{(2)}\left(\Phi_{-T(z)}^{(2)}\left(\hat{\imath}\left(\Phi_{T(z)}^{(1)}(z)\right)\right)\right) \\
 &= \Phi_{t-T(z)}^{(2)}\left(\hat{\imath}\left(\Phi_{T(z)}^{(1)}(z)\right)\right) \\
 &= \Phi_{t-T(z)}^{(2)}\left(\hat{\imath}\left(\Phi_{T(z)-t}^{(1)}\left(\Phi_t^{(1)}(z)\right)\right)\right) \\
 &= h^s\left(\Phi_t^{(1)}(z)\right).
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

Hieraus folgt mit analoger Argumentation für den instabilen Unterraum die behauptete Konjugationseigenschaft des Homöomorphismus  $h$  für alle  $z \in \mathbb{P}$ . ■

Es gibt also bezüglich einer Konjugation genau  $(\dim \mathbb{P} + 1)$  Äquivalenzklassen hyperbolischer Matrizen  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$ .

Wir betrachten abschließend den Fall  $\dim \mathbb{P} = 2$ . Es sei  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$  der Erzeuger des Phasenflusses  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  der linearen Differentialgleichung (des dynamischen Systems, falls  $\mathcal{E}$  nicht explizit zeitabhängig ist)  $\dot{z} = \mathcal{E}z$ . Relativ zu einem Koordinatensystem in  $\mathbb{P}$  sei  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{ab} e_{ab}$  mit  $a, b \in \mathcal{I}(2)$  und die Summenkonvention gilt. Phasenflüsse von zueinander ähnlichen Erzeugern unterscheiden sich lediglich durch eine Basistransformation. Invarianten unter Konjugationen  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{C}^{-1}$  ( $\mathcal{C} \in GL(\dim \mathbb{P}, \mathbb{R})$ ) sind (in diesem Fall)  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{11} + \mathcal{E}^{22}$ ,  $\text{Det}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{11}\mathcal{E}^{22} - \mathcal{E}^{12}\mathcal{E}^{21}$  und  $\text{Disk}(\mathcal{E}) := \text{Spur}^2(\mathcal{E}) - 4\text{Det}(\mathcal{E})$ . Die Eigenwerte  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{C}$  sind

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \text{Spur}(\mathcal{E}) \pm \sqrt{\text{Disk}(\mathcal{E})} \right). \tag{2.158}$$

Nur wenn die Diskriminante verschwindet, kann die komplexe Jordan-Normalform von  $\mathcal{E}$  aus einem Jordan-Block der Größe zwei bestehen, und nur dann ist die Konjugationsklasse von  $\mathcal{E}$  nicht schon durch ihre Spur oder ihre Determinante festgelegt. Die Matrix  $\mathcal{E}$  ist genau dann nicht hyperbolisch, wenn mindestens einer der Eigenwerte verschwindenden Realteil hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn

- (1)  $\text{Det}(\mathcal{E}) = 0$ , also sogar ein Eigenwert Null ist, oder
- (2)  $\text{Det}(\mathcal{E}) > 0$ , aber  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = 0$  ist, also die Eigenwerte rein imaginär sind.

In der  $(\text{Spur}, \text{Det}) \in \mathbb{P}$ -Ebene bilden diese Bedingungen die Abszisse beziehungsweise die positive Ordinate und trennen damit drei Gebiete (hier sind offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{P}$  verstanden als topologischer Raum gemeint):

- (a)  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 0$  charakterisiert den Quadranten mit  $\text{Det}(\mathcal{E}) > 0$  und  $\text{Spur}(\mathcal{E}) > 0$ .
- (b)  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 1$  charakterisiert die beiden Quadranten mit  $\text{Det}(\mathcal{E}) < 0$ . Hier sind beide Eigenwerte reell.
- (c)  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 2$  charakterisiert den Quadranten mit  $\text{Det}(\mathcal{E}) > 0$  und  $\text{Spur}(\mathcal{E}) < 0$ .

Die Aussage (2.3.13) über die Konjugationsklassen besagt, daß die Phasenflüsse innerhalb jeder dieser drei Gebiete untereinander konjugiert sind, aber Phasenflüsse mit unterschiedlichen Indizes sind nicht miteinander konjugiert.

Der Fall  $\text{Ind}(\mathcal{E})$  ist entsprechend dem Vorzeichen von  $\text{Spur}(\mathcal{E})$  noch weiter unterteilbar. In der Situation  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = 0$  zweier Eigenwerte  $\lambda_+ = -\lambda_- \in \mathbb{R}$  wird das Phasenraumvolumen durch den Phasenfluß erhalten, während es für  $\text{Spur}(\mathcal{E}) < 0$  im Grenzfall großer Zeiten mit exponentieller Rate gegen Null geht.

Die Gleichung  $\text{Disk}(\mathcal{E}) = 0$  definiert eine Parabel, die die Konjugationsklassen  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 0$  und  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 2$  noch weiter auftrennt. Für  $\text{Disk}(\mathcal{E}) > 0$ , also reelle Eigenwerte, erhal-

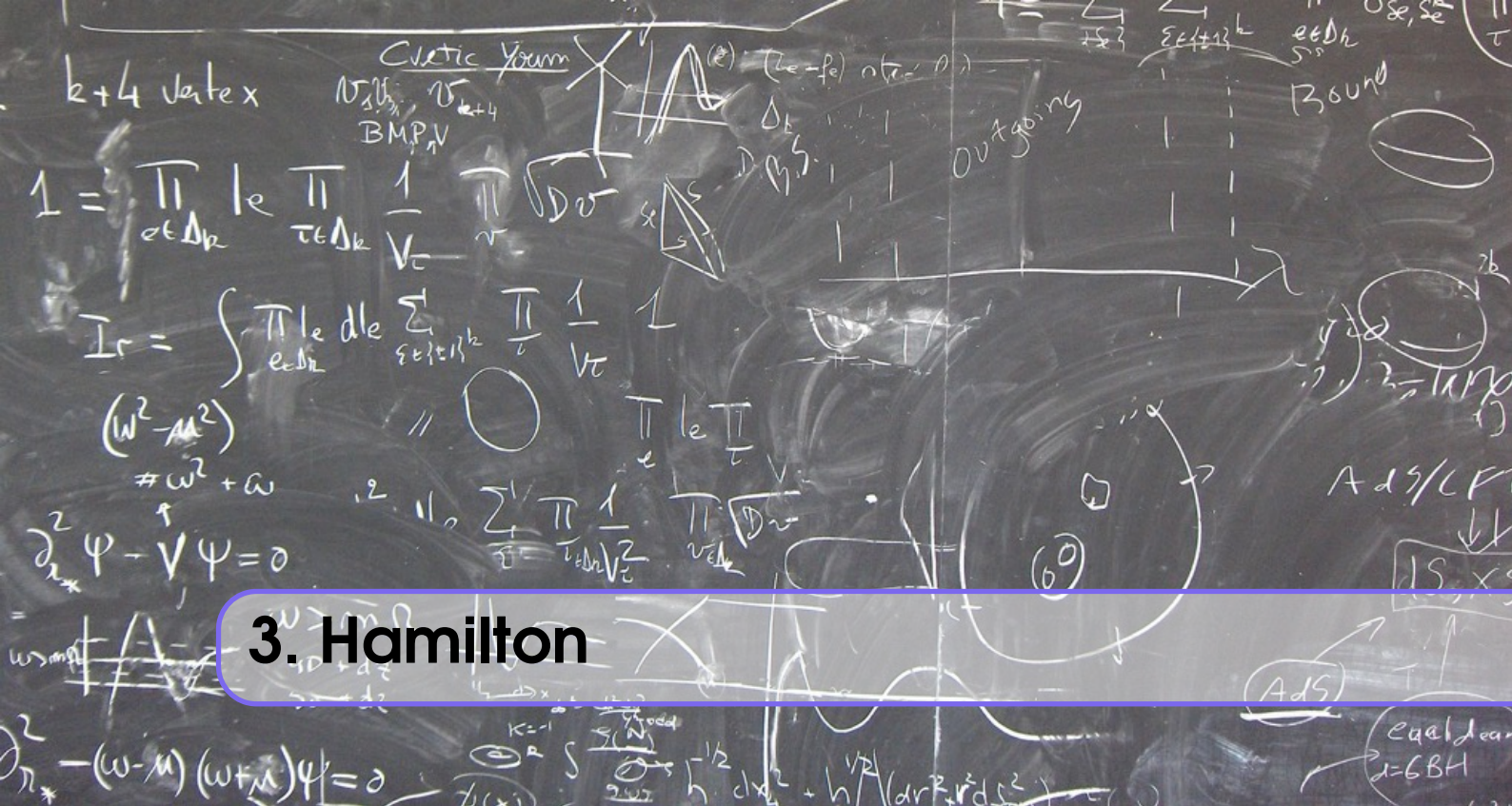


ten wir sogenannte Knoten als Phasenraumportraits. Diese werden stabil genannt, wenn  $\text{Dim}(E^s) = 2$ , also  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 2$  gilt und instabil für  $\text{Ind}(\mathcal{E}) = 0$ . Für  $\text{Disk}(\mathcal{E}) = 0$  kann die Jordan–Normalform von  $\mathcal{E}$  ein nichttrivialer Jordan–Block sein, das entsprechende Phasenportrait heißt ein uneigentlicher Knoten.

Gilt zusätzlich noch  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = 0$ , sind also beide Eigenwerte Null, erhalten wir einen eindimensionalen Eigenraum von Gleichgewichtslagen. Ist  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = 0$ , aber  $\text{Det}(\mathcal{E}) > 0$ , so liegen rein imaginäre Eigenwerte vor, deren periodische Orbits auch Zentren genannt werden.

Für  $\text{Disk}(\mathcal{E}) < 0$  und  $\text{Spur}(\mathcal{E}) < 0$  ist das Phasenportrait spiralförmig und stabil, während  $\text{Disk}(\mathcal{E}) < 0$  und  $\text{Spur}(\mathcal{E}) > 0$  zu sogenannten instabilen Spiralen im Phasenportrait führt.





### 3. Hamilton

Die Mechanik nach Hamilton ist sehr reichhaltig. Zum einen bietet sie neuartige geometrische Konzepte an, zum anderen bietet sie den grundlegenden Rahmen für die sogenannte kanonische Quantisierung klassischer Systeme. Außerdem kennt sie ein mächtiges Variationsprinzip, was erwähnenswerter Weise von einer Übertragung aus der geometrischen Strahlenoptik stammt. Obwohl diese ja von der Ausbreitung von Lichtstrahlen handelt, liegen dem phänomenologischen Konzept des Lichtstrahls doch elektromagnetische Wellen zugrunde. Hier etabliert sich erstmals eine Schnittstelle zwischen Theorien für Punktteilchen und Theorien für Wellen, was im Hinblick auf die Verwirrungen um den sogenannten Wellen–Teilchen–Dualismus in der populären (und ab und an sogar in der wissenschaftlichen) Literatur Ihre aufmerksame Beachtung verdient.

#### 3.1 Duale Konzepte

Wir verzichten hier auf eine ergiebige geometrische Charakterisierung des Impulsphasenraumes  $\mathbb{P}$  von Hamiltonschen Systeme als Kotangentenbündel  $T^*\mathcal{Q}$  mit Konfigurationsraum  $\mathcal{Q}$  in einer Galilei–Raumzeit  $\mathcal{G}$  als Basis. Stattdessen kümmern wir uns ausführlicher um duale Konzepte in algebraischer Manier. Das schmerzt natürlich, erlaubt aber einen schnelleren Einstieg, womit wir es bei den vorausseilenden Entschuldigungen belassen.

Das Konzept des Skalarproduktes euklidischer Vektorräume gestattet eine Verallgemeinerung: An die Stelle eines Vektorraums tritt ein Paar  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  von Vektorräumen mit gemeinsamen Zahlenkörper  $\mathbb{K}$ , in unserem Falle wird dies immer der reelle Zahlenkörper sein. Das Skalarprodukt wird durch eine bilineare Abbildung des Paares  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  in den Zahlenkörper vertreten, die durch weitere Qualifikationen charakterisiert ist. Ein Paar von Vektorräumen ausgestattet mit einem solchen Skalarprodukt wird ein duales Raumpaare genannt. Die früher von dem Skalarprodukt geforderte Symmetrie übersetzt sich hierbei in die Gleichberechtigung der Vektorräume eines dualen Raumpaars. Der für uns wichtigste und in einem gewissen Sinn auch repräsentative Spezialfall dualer Raumpaare wird durch

Paare der Form  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  geliefert, in denen  $\mathcal{X}$  ein beliebiger Vektorraum und  $\mathcal{X}^*$  der Vektorraum aller Linearformen von  $\mathcal{X}$  ist. Letzterer heißt der zu  $\mathcal{X}$  gehörende Dualraum genannt.

**Konzept 3.1.1 — Bilinearform.** Es seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  zwei Vektorräume über einem gemeinsamen Zahlenkörper  $\mathbb{K}$ . Einer **Bilinearform**  $B$  des Raumpaars  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ist eine Abbildung, die jedem geordneten Paar  $(x, y)$  von Vektoren  $x \in \mathcal{X}$  und  $y \in \mathcal{Y}$  eindeutig einen mit  $B(x, y) \in \mathbb{K}$  bezeichneten Skalar so zuordnet, daß die Linearitätseigenschaften

$$\begin{aligned} B(x + x', y) &= B(x, y) + B(x', y) , \\ B(x, y + y') &= B(x, y) + B(x, y') , \\ B(ax, y) &= aB(x, y) = B(x, ay) \end{aligned} \quad (3.1)$$

erfüllt sind für alle  $x, x' \in \mathcal{X}$ ,  $y, y' \in \mathcal{Y}$  und  $a \in \mathbb{K}$ .

**Konzept 3.1.2 — Duales Raumpaar.** Es sei  $B$  eine Bilinearform des Raumpaars  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , die außerdem noch folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) Aus  $B(x, y) = 0_{\mathbb{K}}$  für alle  $y \in \mathcal{Y}$  folgt  $x = 0_{\mathcal{X}}$ .
- (2) Aus  $B(x, y) = 0_{\mathbb{K}}$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  folgt  $y = 0_{\mathcal{Y}}$ .

Dann heißt das Tripel  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, B)$  ein **duales Raumpaar** und  $B$  das die Dualität bestimmende **skalare Produkt**.

Statt  $B(x, y)$  schreiben wir  $\langle x, y \rangle$  und verzichten bei der Bezeichnung des Raumpaars auf die Angabe des die Dualität bestimmenden skalaren Produkts.

**Aussage 3.1.1** Es sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ein duales Raumpaar,  $\mathcal{X}$  besitze endliche Dimension, und  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))}$  sei eine Basis von  $\mathcal{X}$ . Aus  $y \in \mathcal{Y}$  und  $\langle e_a, y \rangle = 0$  für  $a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$  folgt dann  $y = 0_{\mathcal{Y}}$ .

**Begründung:** Relativ zur gewählten Basis von  $\mathcal{X}$  hat ein beliebiger Vektor  $x \in \mathcal{X}$  die Darstellung  $x = x^a e_a$  (Summenkonvention). Daher gilt  $\langle x, y \rangle = \langle x^a e_a, y \rangle = x^a \langle e_a, y \rangle = 0$ . aus Eigenschaft (2) von Konzept 3.1.2 folgt hieraus die Behauptung. ■

Aus der Symmetrie der Linearitätseigenschaften und den Forderungen (1) und (2) des Konzeptes 3.1.2 folgt, daß die Vektorräume eines dualen Paares völlig gleichberechtigt sind. Dies hat folgende schöne Eigenschaft: Vertauschen wir in einer Aussage für duale Raumpaare die Vektorräume, so erhalten wir wieder eine gültige Aussage für die dualen Raumpaare, die sogenannte zur ursprünglichen Aussage duale Aussage. Der Vertauschungsprozeß selbst heißt **Dualisierung**.

**Aussage 3.1.2** Es sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ein duales Raumpaar, und einer der beiden Vektorräume besitze endliche Dimension. Dann sind die beiden Vektorräume isomorph und besitzen somit gleiche Dimension.

**Begründung:** Wenn  $\mathcal{X}$  der Nullraum ist, so folgt aus  $x \in \mathcal{X}$  und  $y \in \mathcal{Y}$  stets  $\langle x, y \rangle = 0$ , weil  $x$  ja der Nullvektor sein muß. Wegen Eigenschaft (2) von Konzept 3.1.2 erhalten wir weiterhin  $y = 0_{\mathcal{Y}}$ , also ist auch  $\mathcal{Y}$  der Nullraum. Beachten Sie, daß der Nullraum die Dimension Null besitzt. Im weiteren sei  $\text{Dim}(\mathcal{X}) > 0$ , und  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))}$  sei eine Basis von  $\mathcal{X}$ . Ferner seien  $f_1, \dots, f_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) linear unabhängige Vektoren aus  $\mathcal{Y}$ . Wir

setzen  $c_{a,b} := \langle e_a, f_b \rangle$  für  $a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$  und  $b \in \mathcal{I}(k)$ . Die  $\text{Dim}(\mathcal{X})$ -Tupel  $c_b := (c_{1,b}, \dots, c_{\text{Dim}(\mathcal{X}),b})$  können wir als Vektoren des arithmetischen Vektorraums  $\mathbb{K}^{\text{Dim}(\mathcal{X})}$  auffassen. Wir nehmen  $k > \text{Dim}(\mathcal{X})$  an. Dann sind die Vektoren  $c_1, \dots, c_k$  linear unabhängig, und es gibt nicht sämtlich verschwindende Skalare  $d_1, \dots, d_k$  mit  $d_b c_b = 0_{\mathbb{K}^{\text{Dim}(\mathcal{X})}}$ , wobei wir die Summenkonvention wieder in Kraft gesetzt haben. Also,  $d_b c_{a,b} = 0_{\mathbb{K}^{\text{Dim}(\mathcal{X})}}$  für alle  $a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$ . Es folgt  $\langle e_a, d_b f_b \rangle = d_b \langle e_a, f_b \rangle = d_b c_{a,b} = 0_{\mathbb{K}^{\text{Dim}(\mathcal{X})}}$  für alle  $a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$  und daher  $d_b f_b = 0_{\mathcal{Y}}$  nach (2) in Konzept 3.1.2. Nach Voraussetzung verschwinden nicht alle Skalare dieser Linearkombination und ebenfalls nach Voraussetzung sind die Vektoren dieser Linearkombination linear unabhängig. Widerspruch! Somit muß  $k \leq \text{Dim}(\mathcal{X})$  gelten. Somit besitzt auch der Vektorraum  $\mathcal{Y}$  endliche Dimension, und es gilt  $\text{Dim}(\mathcal{Y}) \leq \text{Dim}(\mathcal{X})$ . Dualisierung liefert, daß bei endlicher Dimension von  $\mathcal{Y}$  auch  $\text{Dim}(\mathcal{X}) \leq \text{Dim}(\mathcal{Y})$  gelten muß. Insgesamt gilt daher  $\text{Dim}(\mathcal{X}) = \text{Dim}(\mathcal{Y}) < \infty$ . Damit sind die Vektorräume  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  isomorph. ■

**Aussage 3.1.3** Es sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ein duales Raumpaard,  $\mathcal{X}$  besitze endliche Dimension, und  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))}$  sei eine Basis von  $\mathcal{X}$ . Dann gibt es genau eine Basis  $\{f_b\}_{b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{Y}))}$  von  $\mathcal{Y}$  mit  $\langle e_a, f_b \rangle = \delta_{ab}$  für  $a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$  und  $b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{Y}))$ .

#### Begründung:

- Existenz:** Nach der vorherigen Aussage gilt jedenfalls  $\text{Dim}(\mathcal{X}) = \text{Dim}(\mathcal{Y})$ . Es sei zunächst  $\{h_b\}_{b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))}$  eine beliebige Basis von  $\mathcal{Y}$ . Wir setzen  $c_{a,b} := \langle e_a, h_b \rangle$  und erhalten eine  $\text{Dim}(\mathcal{X}) \times \text{Dim}(\mathcal{X})$ -Matrix  $C = (c_{a,b})$ . Für beliebige Vektoren  $x = x^a e_a$  und  $y = y^b h_b$  gilt  $\langle x, y \rangle = x^T C y$ . Wäre die quadratische Matrix  $C$  singular, so würde es einen Vektor  $r \neq 0_{\mathcal{X}}$  derart geben, daß  $r^T C = 0_{\mathcal{Y}}$ . Wir erhielten dann für diesen Vektor  $\langle r, y \rangle = 0$  für alle  $y \in \mathcal{Y}$ , was Eigenschaft (1) aus Konzept 3.1.2 widerspricht. Daher ist  $C$  eine reguläre Matrix, und es existiert eine inverse Matrix  $C^{-1} = (d_{b,a})$ . Die Vektoren  $f_a = d_{b,a} h_b$  (Summenkonvention) bilden dann eine neue Basis von  $\mathcal{Y}$ . Es gilt  $\langle e_a, f_b \rangle = \langle e_a, d_{u,b} h_u \rangle = c_{a,u} d_{u,b} = \delta_{a,b}$ . Also erfüllt die neue Basis die geforderte Eigenschaft.
- Eindeutigkeit:** Sei  $\{f'_b\}_{b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))}$  eine zweite Basis von  $\mathcal{Y}$ , für die ebenfalls  $\langle e_a, f'_b \rangle = \delta_{a,b}$  erfüllt ist. Für festen Index  $b$  folgt  $\langle e_a, f'_b - f_b \rangle = \langle e_a, f'_b \rangle - \langle e_a, f_b \rangle = 0$  für alle  $a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$ . Wegen Aussage 3.1.1 folgt  $f'_b - f_b = 0_{\mathcal{Y}}$ , oder  $f'_b = f_b$  für alle  $b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{X}))$ , also Eindeutigkeit.

Die Basis  $\{f_b\}_{b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{Y}))}$  ist somit durch die angegebene Eigenschaft eindeutig bestimmt. ■

Die nach dieser Aussage durch eine Basis  $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{Y}))}$  von  $\mathcal{X}$  eindeutig bestimmte Basis  $\{f_b\}_{b \in \mathcal{I}(\text{Dim}(\mathcal{Y}))}$  von  $\mathcal{Y}$  heißt die zu der ersten Basis **duale Basis**. Dualisierung bringt hier keine weitere Erkenntnis. Hinsichtlich dualer Basen läßt sich das skalare Produkt besonders günstig ausdrücken: Ist  $x = x^a e_a$  und  $y = y^b f_b$  so erhalten wir wegen  $\langle e_a, f_b \rangle = \delta_{a,b}$  einfach  $\langle x, y \rangle = x^a \delta_{a,b} y^b$ .

Wir kommen nun zu der uns konkret erwartenden Situation. Es sei  $\mathcal{X}$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}(= \mathbb{R})$ . Die Qualifikation steht hier in Klammern, weil sie nicht wirklich essentiell

ist für das Folgende. Dann ist die Menge  $\mathcal{X}^* = L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$  aller Linearformen auf  $\mathcal{X}$ , also aller Abbildungen  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$  von  $\mathcal{X}$  in den Zahlenkörper, selbst ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , der **Dualraum** von  $\mathcal{X}$  heißt. Das Raumpaard  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  wird ein duales Raumpaard, wenn ein skalares Produkt eines Vektors  $v \in \mathcal{X}$  und einer Linearform  $\varphi \in \mathcal{X}^*$  durch  $\langle v, \varphi \rangle := \varphi(v)$  erklärt wird. Wegen

$$\begin{aligned} \langle v+w, \varphi \rangle &= \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \langle v, \varphi \rangle + \langle w, \varphi \rangle, \\ \langle v, \varphi + \psi \rangle &= (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = \langle v, \varphi \rangle + \langle v, \psi \rangle, \\ \langle cv, \varphi \rangle &= \varphi(cv) = c\varphi(v) = c\langle v, \varphi \rangle, \\ \langle v, c\varphi \rangle &= (c\varphi)(v) = c\varphi(v) = c\langle v, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

für alle  $v, w \in \mathcal{X}$ ,  $\varphi, \psi \in \mathcal{X}^*$  und  $c \in \mathbb{K}$  sind nämlich alle Linearitätseigenschaften erfüllt. Außerdem gelten auch die Forderungen (1) und (2) aus Konzept 3.1.2, was Ihnen zur Inspiration überlassen bleibt. Das so erklärte skalare Produkt heißt sinniger Weise das **natürliche skalare Produkt**. Wir verstehen unter  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  immer das duale Raumpaard versehen mit diesem natürlichen skalaren Produkt.

Die folgende Aussage zeigt, daß die dualen Raumpaare der Form  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  in einem bestimmten Sinn bereits den allgemeinen Fall dualer Raumpaare erfassen.

**Aussage 3.1.4** Es sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ein beliebiges duales Raumpaard. Dann gibt es genau eine Injektion  $\iota : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}^*$  mit  $\langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \langle v, \iota(y) \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)}$  für alle  $v \in \mathcal{X}$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ .

Beachten Sie, daß auf der linken Seite das skalare Produkt des dualen Raumpaars  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  steht, auf der rechten Seite dagegen das natürliche skalare Produkt des dualen Raumpaars  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ .

### Begründung:

1. **Eindeutigkeit:** Es sei  $\iota$  eine Injektion der behaupteten Art. Für jeden Vektor  $y \in \mathcal{Y}$  ist  $\iota_y := \iota(y)$  eine Linearform aus  $\mathcal{X}^*$ , und für jeden Vektor  $v \in \mathcal{X}$  gilt  $\iota_y(v) = \langle v, \iota_y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)} = \langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ . Diese Gleichung besagt, daß die Bildform eines beliebigen Vektors  $y \in \mathcal{Y}$  bezüglich der Injektion bereits durch das skalare Produkt des dualen Raumpaars  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  eindeutig bestimmt ist. Das heißt, es kann höchstens (Frage nach Existenz) eine Injektion der verlangten Art geben.
2. **Existenz:** Es sei  $y \in \mathcal{Y}$  fest gewählt. Dann wird durch  $\varphi_y(v) := \langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$  für alle  $v \in \mathcal{X}$  eine Linearform  $\varphi_y$  aus  $\mathcal{X}^*$  bestimmt. Daher wird durch  $\iota_y = \varphi_y$  eine Abbildung  $\iota : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}^*$  erklärt. Nun gilt für alle Vektoren  $v \in \mathcal{X}$ ,  $y, z \in \mathcal{Y}$  und  $c \in \mathbb{K}$ :  $\varphi_{y+z}(v) = \langle v, y+z \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} + \langle v, z \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \varphi_y(v) + \varphi_z(v) = (\varphi_y + \varphi_z)(v)$ ,  $\varphi_{cy}(v) = \langle v, cy \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = c\langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = c\varphi_y(v) = (c\varphi_y)(v)$ . Es folgt  $\varphi_{y+z} = \varphi_y + \varphi_z$  und  $\varphi_{cy} = c\varphi_y$ , also wegen  $\iota_y \equiv \iota(y) = \varphi_y$  auch  $\iota(y+z) = \iota(y) + \iota(z)$  und  $\iota(cy) = c\iota(y)$ . Das heißt  $\iota$  ist eine lineare Abbildung. Gilt  $y \in \text{Kern } \iota$ , so ist  $\varphi_y$  die Nullform aus  $\mathcal{X}^*$ . Für alle  $v \in \mathcal{X}$  erhalten wir daher  $\langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \varphi_y(v) = \iota_y(v) = 0_{\mathbb{K}}$ . Wegen Eigenschaft (2) in Konzept 3.1.2 erhalten wir daraus  $y = 0_{\mathcal{Y}}$ . Also ist  $\text{Kern } \iota = \{0_{\mathcal{Y}}\}$ . Damit  $\iota$  sogar eine Injektion.

3. **Eigenschaft:** Wegen der Definition des natürlichen skalaren Produkts von  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  folgt  $\langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \varphi_y(v) = \iota_y(v) = \langle v, \iota_y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)} = \langle v, \iota(y) \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)}$ .

Damit sind alle Aussagen begründet. ■

**Konzept 3.1.3 — Isomorphie dualer Raumpaare.** Zwei duale Raumpaare  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  und  $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$  mit gemeinsamen Zahlenkörper heißen **isomorph**, wenn es Isomorphismen  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  und  $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$  so gibt, daß für alle  $x \in \mathcal{X}$  und  $y \in \mathcal{Y}$  gilt  $\langle x, y \rangle = \langle f(x), g(y) \rangle$ .

Mit dieser Begriffsbildung können wir den Inhalt von Aussage 3.1.4 auch so formulieren: Zu jedem dualen Raumpaar  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus  $\iota$  von  $\mathcal{Y}$  auf einen Unterraum  $\mathcal{U}^*$  von  $\mathcal{X}^*$ . Es sind dann die dualen Raumpaare  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  und  $(\mathcal{X}, \mathcal{U}^*)$  isomorph. Dazu brauchen wir lediglich für den Isomorphismus  $f$  aus obigem Konzept die Identität von  $\mathcal{X}$  einzusetzen. Damit ist das duale Raumpaar  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  bereits für den allgemeinen Fall repräsentativ: Bis auf Isomorphie erhalten wir alle anderen dualen Raumpaare  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  durch Auswahl geeigneter Unterräume  $\mathbb{U}^*$  von  $\mathcal{X}^*$  in der Form  $(\mathcal{X}, \mathcal{U}^*)$ .

Dualisierung der Aussage 3.1.4 liefert zu jedem dualen Raumpaar  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  die Existenz einer eindeutig bestimmten Injektion  $\vartheta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}^*$  mit  $\langle v, y \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \langle \vartheta v, y \rangle_{(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y})}$  für alle Vektoren  $v \in \mathcal{X}$  und  $y \in \mathcal{Y}$ . Jedes duale Raumpaar  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ist daher auch zu einem dualen Raumpaar der Form  $(\mathcal{V}^*, \mathcal{Y})$  mit einem Unterraum  $\mathcal{V}^*$  von  $\mathcal{Y}^*$  isomorph. Das duale Raumpaar  $(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y})$  ist dabei entsprechend dual konzipiert: Für einen Vektor  $y \in \mathcal{Y}$  und eine Linearform  $\psi \in \mathcal{Y}^*$  gilt  $\langle \psi, y \rangle := \psi(y)$ . Interessant wird hier der Fall  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ , auf den wir weiter unten eingehen.

Wenn  $\mathcal{X}$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, dann sind nach Aussage 3.1.2 bei jedem dualen Raumpaar  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  die Vektorräume  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  isomorph. Setzen wir hier für  $\mathcal{Y}$  den Dualraum  $\mathcal{X}^*$  ein, so folgt sofort die Isomorphie von  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{X}^*$ . Da außerdem kein echter Unterraum von  $\mathcal{X}^*$  zu  $\mathcal{X}$  isomorph sein kann, erhalten wir folgendes Resultat:

**Aussage 3.1.5** Es sei  $\mathcal{X}$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann ist der Dualraum  $\mathcal{X}^*$  zu  $\mathcal{X}$  isomorph, und bis auf Isomorphie ist  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  das einzige duale Raumpaar mit  $\mathcal{X}$  als ersten Vektorraum.

Zu dem Dualraum  $\mathcal{X}^*$  eines beliebigen Vektorraums  $\mathcal{X}$  existiert wieder der Dualraum, den wir sinngemäß mit  $\mathcal{X}^{**}$  bezeichnen. Er besteht aus allen Linearformen von  $\mathcal{X}^*$ , also aus allen linearen Abbildungen  $\psi^*: \mathcal{X}^* \rightarrow \mathbb{K}$ . Aus der zur Aussage 3.1.4 dualen Aussage folgt: Zu dem dualen Raumpaar  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  gibt es genau eine Injektion  $\iota: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^{**}$  mit  $\langle x, \varphi \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)} = \langle \iota(x), \varphi \rangle_{(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^*)}$  für alle Vektoren  $x \in \mathcal{X}$  und  $\varphi \in \mathcal{X}^*$ . Die Injektion  $\iota$  heißt die **natürliche Injektion** von  $\mathcal{X}$  in  $\mathcal{X}^{**}$ . Aus der Konstruktion der skalaren Produkte von  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$  und  $(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^*)$  folgt unmittelbar, daß  $\iota(x)$  diejenige Linearform aus  $\mathcal{X}^{**}$  ist, die für jede Linearform  $\varphi$  aus  $\mathcal{X}^*$  den Wert  $\iota_x(\varphi) = \langle \iota(x), \varphi \rangle_{(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^*)} = \langle x, \varphi \rangle_{(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)} = \varphi(x)$  annimmt. Im Sinn dieser natürlichen Injektion bestimmt also jeder Vektor  $x \in \mathcal{X}$  eindeutig eine Linearform  $\Psi_x^* = \iota(x)$  aus  $\mathcal{X}^{**}$ , für die  $\Psi_x^*(\varphi) = \varphi(x)$  für alle  $\varphi$  aus  $\mathcal{X}^*$  gilt. Der aus diesen Linearformen bestehende Unterraum  $\iota(\mathcal{X})$  von  $\mathcal{X}^{**}$  ist bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen  $\mathcal{X}$  ein echter Unterraum, das heißt in

diesem Fall gibt es doch Linearformen in  $\mathcal{X}^{**}$ , die nicht durch Vektoren in  $\mathcal{X}$  bestimmt sind. Wenn  $\mathcal{X}$  dagegen endliche Dimension besitzt, dann gilt  $\mathcal{X} \cong \mathcal{X}^*$ , andererseits aber auch  $\mathcal{X}^* \cong \mathcal{X}^{**}$  und somit  $\mathcal{X} \cong \mathcal{X}^{**}$ . Die natürliche Injektion  $\iota$  ist daher in diesem Fall sogar ein Isomorphismus von  $\mathcal{X}$  auf  $\mathcal{X}^{**}$ .

## 3.2 Hamiltonsche Systeme

Es sei  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$  der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems aus  $n \in \mathbb{N}$  Teilchen in einer Galilei-Raumzeit. Wegen der affinen Struktur können wir  $\mathcal{Q}$  auch als offene Menge in  $\mathbb{E}^n$  auffassen. In der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik tritt jetzt nicht mehr das Tangentialbündel  $T\mathcal{Q} \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$  bestehend aus den Orten und Geschwindigkeiten des Teilchensystems als Phasenraum (Geschwindigkeitsphasenraum) in Erscheinung, sondern das sogenannte Kotangentialbündel  $(T\mathcal{Q})^* \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^{n*}$ . Letzteres besteht aus den kinematisch möglichen Lagen und Impulsen des Teilchensystems und heißt daher **Impulsphasenraum**, den wir ebenfalls (da Verwirrungen ausgeschlossen sind) mit  $\mathbb{P}$  bezeichnen. Wie bereits einleitend bemerkt, können wir hier keine Zeit auf die tieferen geometrischen Strukturen in diesen Konzeptionen verwenden. Allerdings unterstreichen wir, daß es sich bei  $(\mathbb{E}, \mathbb{E}^*)$  um ein duales Raumpaar handelt.

**Konzept 3.2.1 — Hamiltonsches System.** Ein **Hamiltonsches System** ist ein Paar  $(\mathbb{P}, H)$  bestehend aus dem Impulsphasenraum eines einfachen mechanischen Systems und einer einmal stetig differenzierbaren Funktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , der sogenannten **Hamilton-Funktion**, mittels derer die Newtonschen Bewegungsgleichungen folgendermaßen gegeben sind:

$$\dot{q} = \text{grad}_p H, \quad \dot{p} = -\text{grad}_q H, \quad (3.3)$$

für  $(q, p) \in \mathbb{P}$ .

Eine Kurve  $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  im Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$  ist also genau dann eine Bewegung des Hamiltonschen Systems  $(\mathbb{P}, H)$ , wenn für  $\gamma(t) = (q(t), p(t))$  ( $t \in J$ ) und für alle  $a \in \mathcal{I}(3n)$  relativ zu (kanonischen) Koordinaten in  $\mathbb{P}$  gilt:

$$\dot{q}^a(t) = \frac{\partial H}{\partial p_a}(\gamma(t)), \quad \dot{p}^a(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^a}(\gamma(t)). \quad (3.4)$$

Diese Gleichungen heißen die **kanonischen Gleichungen** des Hamiltonschen-Systems  $(\mathbb{P}, H)$ .

■ **Beispiel 3.1** Der eindimensionale harmonische Oszillator mit Masse  $0 < m \in \mathbb{R}$  und Kreisfrequenz  $0 < \omega \in \mathbb{R}$  wird als Hamilton-System  $(\mathbb{P}, H)$  mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}^*$  und Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} \left( \|p\|_{\mathbb{E}^*}^2 + m^2 \omega^2 \|q\|_{\mathbb{E}}^2 \right) \quad (3.5)$$

in dieser Formulierung repräsentiert. Die kanonischen Gleichungen dieses Systems sind folglich

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -m\omega^2 q, \quad (3.6)$$

die offenbar äquivalent zur Newtonschen Bewegungsgleichung  $\ddot{q} = -\omega^2 q$  sind. ■



In der Literatur finden Sie leicht noch andere Konzeptionen, insbesondere die folgende (immer noch etwas oberflächliche): Es sei

$$\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0_q & \text{id}_p \\ -\text{id}_q & 0_p \end{pmatrix} \in \text{Mat}(\text{Dim } \mathbb{P}, \mathbb{R}). \quad (3.7)$$

Weiterhin setzen wir  $z := (q, p) \in \mathbb{P}$  und erklären den Gradienten einer  $C^2(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ -Funktion etwas salopp über  $dH := \text{grad}_{\mathbb{P}} H dz$ . Bitte stellen Sie sicher, zum Beispiel durch explizites Ausschreiben, daß Sie diese Gleichung verstehen. Das Vektorfeld  $X_H := \mathbb{J} \text{grad}_{\mathbb{P}} H$  auf dem Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$  heißt **Hamiltonsches Vektorfeld**. Die kanonischen Gleichungen eines Hamiltonschen-Systems lassen sich dann folgendermaßen formulieren:  $\dot{z} = X_H(z)$ .

**Aussage 3.2.1** Es sei  $(\mathbb{P}, H)$  ein Hamiltonsches System und  $\gamma(t)$  eine Integralkurve des zugehörigen Hamiltonschen Vektorfeldes. Dann ist  $H(\gamma(t))$  konstant im Kurvenparameter  $t$ .

**Begründung:** Mittels der Kettenregel, der Definition des Hamiltonschen Vektorfeldes und der Voraussetzung, daß  $\gamma(t)$  eine Integralkurve ist, folgt durch direktes Ausrechnen

$$\begin{aligned} \dot{H}(\gamma(t)) &= \langle \dot{\gamma}(t), \text{grad}_{\mathbb{P}} H \rangle_{\mathbb{P}} = -\langle \dot{\gamma}(t), \mathbb{J} X_H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= -\langle X_H(\gamma(t)), \mathbb{J} X_H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} = -\langle \mathbb{J}^T X_H(\gamma(t)), x_H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= +\langle \mathbb{J} X_H(\gamma(t)), X_H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} = +\langle X_H(\gamma(t)), \mathbb{J} X_H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Symmetrie von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}$  ausgenutzt. Dies meint das die Dualität von Konfigurationsraum und Impulsraum (nicht Impulsphasenraum!) bestimmte skalare Produkt. ■

Die letzte Aussage ist enorm wichtig sowohl für die quantitative als auch für die qualitative Analyse Hamiltonscher Systeme, denn sie erlaubt uns, das dynamische System auf die **Niveaumenge**  $H^{-1}(E)$  ( $E \in \mathbb{R}$ ), auch **Energieschale** genannt, einzuschränken. Nach dem Satz über implizite Funktionen sind dies für reguläre Werte  $E$  von  $H$  Untermannigfaltigkeiten des Impulsphasenraums  $\mathbb{P}$ .

■ **Beispiel 3.2 — Der  $n$ -dimensionale harmonische Oszillator.** Der  $n$ -dimensionale harmonische Oszillator ist ein mechanisches System aus  $n \in \mathbb{N}$  eindimensionalen harmonischen Oszillatoren, die sich unabhängig voneinander (also ohne miteinander zu wechselwirken, das heißt sie sind nicht gekoppelt) bewegen und durch die Kreisfrequenzen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  charakterisiert sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an  $\omega_a = 1$  (inverse Zeiteinheit) für alle  $a \in \mathcal{I}(n)$ .

Der Konfigurationsraum dieses System ist  $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$  und der Impulsraum entsprechend  $\mathcal{Q}^*$ . In der Hamiltonschen Formulierung ist dieses System durch das Paar  $(\mathbb{P}, H)$  mit dem Impulsphasenraum  $\mathbb{P} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}^*$  und der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2} \left( \|p\|_{\mathcal{Q}^*}^2 + \|q\|_{\mathcal{Q}}^2 \right) \quad (3.9)$$

für alle  $z = (q, p) \in \mathbb{P}$  repräsentiert. Das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld auf dem Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$  ist durch  $X_H(z) = (p, -q) \in T_z \mathbb{P}$  an allen Punkten  $z \in \mathbb{P}$  gegeben. Es

sei  $\gamma(t) \in \mathbb{P}$  eine Bewegung dieses Systems. Dann gilt entlang der Bewegung

$$\begin{aligned} \dot{H}(\gamma(t)) &= \langle \dot{\gamma}(t), \text{grad}_{\mathbb{P}} H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} = -\langle X_H(\gamma(t)), \mathbb{J}X_H(\gamma(t)) \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= \left\langle (\text{Pr}_{\mathcal{Q}^*}(\gamma(t)), -\text{Pr}_{\mathcal{Q}}(\gamma(t)))^T, (\text{Pr}_{\mathcal{Q}}(\gamma(t)), \text{Pr}_{\mathcal{Q}^*}(\gamma(t)))^T \right\rangle_{\mathbb{P}} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei  $\text{Pr}_{\mathcal{U}}$  ( $\mathcal{U} \in \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^*\}$ ) Projektoren auf den Konfigurationsraum oder Impulsraum des Systems bezeichne. Somit ist die Gesamtenergie eine Bewegungsinvariante. Als Niveaumenge finden wir für Energien  $0 < E \in \mathbb{R}$ :

$$H^{-1}(E) = \left\{ z \in \mathbb{P} : \|z\|_{\mathbb{P}}^2 = 2E \right\} = \mathbb{S}_{\sqrt{2E}}^{\text{Dim}(\mathbb{P})-1}. \quad (3.11)$$

Die Niveaumenge ist eine  $(\text{Dim}(\mathbb{P}) - 1)$ -dimensionale Kugeloberfläche mit Radius  $\sqrt{2E}$ . Jeder Orbit des Systems mit der Energie  $E$  verläuft ganz in der Hyperfläche  $H^{-1}(E)$  von  $\mathbb{P}$ . Eine Übersicht über alle Bahnen zu einer festen Energie  $E > 0$  verschaffen wir uns folgendermaßen: Auf der Niveaulfläche  $H^{-1}(E)$  führen wir folgende Äquivalenzrelation ein: Für  $z_1, z_2 \in H^{-1}(E)$  sei  $z_1 \sim z_2$ , wenn es eine Bahn mit der Energie  $E$  gibt, die  $z_1$  und  $z_2$  miteinander verbindet. Der Quotient  $\mathbb{B}_E := H^{-1}(E) / \sim$  ist dann der **Bahnenraum** zur Energie  $E$  und beinhaltet offenbar alle Bahnen des Systems mit der Energie  $E$ .

In unserem Fall lassen sich die Bahnen mit Hilfe der komplexen Struktur auf  $\mathbb{R}^{2n}$  besonders einfach erfassen: Für  $(q, p)$  schreiben wir  $u := p + iq$  und verstehen die Komponenten  $u^\mu$  von  $u$  als komplexe Koordinaten  $u^\mu := p_\mu + iq^\mu \in \mathbb{C}$ . Auf diese Weise ist  $\mathbb{R}^{2n}$  (und damit auch  $\mathbb{P}$ ) mit  $\mathbb{C}^n$  identifiziert. Die komplexe Darstellung ist sehr elegant, denn die kanonische Gleichung wird einfach  $\dot{u} = iu$ . In jeder Komponente ist somit  $\dot{u}^\mu = iu^\mu$ . Die Lösung ist  $u^\mu(t) = e^{it} u^\mu(0)$ , wenn die Anfangsbedingung bei  $t = 0$  gesetzt wird. Also  $u(t) = e^{it} u(0)$ . Sind  $u_1$  und  $u_2$  auf der Bahn der Bewegung  $u(t) = e^{it} u(0)$ , so gilt  $u(t_1) = u_1$  und  $u(t_2) = u_2$  für geeignete  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Es folgt  $u(t_1) = e^{it_1} u(0) = e^{i(t_1-t_2)} e^{it_2} u(0) = e^{i(t_1-t_2)} u(t_2)$ . Daher ist  $u_1 = e^{i\varphi} u_2$  für  $\varphi = t_1 - t_2$ . Gilt umgekehrt  $u_1 = e^{i\varphi} u_2$  für ein  $\varphi \in \mathbb{R}$ , so haben wir für die Bahn  $u(t) = e^{it} u_1 : u(0) = u_1$  und  $u(-\varphi) = u_2$ .

An dieser Stelle erinnern wir an den komplex-projektiven Raum  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ , oder erfahren von diesem zum ersten Mal. Es ist  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) := \mathbb{S}_r^{2n-1} / \sim$  mit folgender Äquivalenzrelation:  $a \sim b$ , wenn es einen Phasenfaktor  $\lambda \in U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\|_{\mathbb{C}} = 1\}$  mit  $a = \lambda b$  gibt. Insgesamt haben wir gezeigt:

**Aussage 3.2.2** Der Bahnenraum  $\mathbb{B}_E$  für den  $n$ -dimensionalen harmonischen Oszillator zur Energie  $E > 0$  ist der komplex-projektive Raum  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ , und die Quotientenabbildung  $\vartheta : H^{-1}(E) \rightarrow \mathbb{B}_E = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$  hat als Fasern  $\vartheta^{-1}$  gerade die Bahnen zur Energie  $E$ .

In unserem Beispiel ist  $H^{-1}(E)$  genau dann eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{P}$  der Dimension  $2n - 1$ , wenn  $E > 0$

Daß die Energie eine Bewegungsinvariante (Bewegungskonstante) ist, werden wir später aus der  $SO(2)$ -Symmetrie des betrachteten Systems verstehen. Die zweidimensionale Drehgruppe wird durch die zu ihr isomorphe Gruppe  $U(1)$  realisiert. Für die zu  $\lambda \in U(1)$  gehörige Transformation  $z \mapsto z' := \lambda z$  gilt  $\dot{z}' = \lambda \dot{z} = \lambda iz = iz'$ . Die kanonischen Gleichungen sind also invariant unter dieser Transformation. Wir werden alsbald einsehen, daß die Invarianz zu  $H$  als Bewegungskonstante führt. Der Zusammenhang zwischen Symmetrien

und Bewegungskonstanten eines mechanischen Systems wird durch die Theoreme von Emmy Noether gestiftet. Diese Theoreme gehören zu den tiefsten Erkenntnissen aller Naturwissenschaften, und werden uns auch im weiteren Ausbau der Theoretischen Physik immer wieder begegnen.

Der  $n$ -dimensionale harmonische Oszillator hat weit mehr Symmetrie als nur die  $SO(2)$ -Symmetrie. Zum Beispiel können die Komponenten  $u^\mu$  ( $\mu \in \mathcal{J}(n)$ ) von  $u$  unabhängig voneinander gedreht werden, ohne die kanonischen Gleichungen zu verändern: Sei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (U(1))^n \cong (SO(2))^n$  mit der zugehörigen Transformation  $z \mapsto z' := (\lambda_1 z^1, \dots, \lambda_n z^n)$ . Aus  $\dot{z} = iz$  folgt  $\dot{z}' = iz'$  und umgekehrt genauso. Als Erhaltungsgrößen erhalten wir hieraus die partiellen Energien  $H_\mu := \|z^\mu\|_{\mathbb{C}}^2/2$ . Zu den Vektoren  $E = (E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $E_\mu > 0$  für alle  $\mu \in \mathcal{J}(n)$  gehören die  $n$ -dimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeiten

$$\mathbb{M}_E \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n : H_\mu(z) = E_\mu \forall \mu \in \mathcal{J}(n)\} = \mathbb{S}_{\sqrt{2E_1}}^1 \times \dots \times \mathbb{S}_{\sqrt{2E_n}}^n. \quad (3.12)$$

Jede Bahn, die  $\mathbb{M}_E$  trifft, verläuft vollständig in  $\mathbb{M}_E$ .

Eine andere Symmetrie des Systems ist durch die spezielle unitäre Gruppe  $SU(n)$  gegeben, die folgendermaßen definiert werden kann:

$$SU(n) = \{A \in \mathbb{C}(n) : \|Az\| = \|z\| \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ und } \text{Det } A = 1\}, \quad (3.13)$$

wobei  $\|z\|^2 = \|z^1\|_{\mathbb{C}}^2 + \dots + \|z^n\|_{\mathbb{C}}^2$ . Im Falle  $n = 2$  erhalten wir (mit Noether später) zur dreidimensionalen Gruppe  $SU(2)$  die drei Bewegungsinvarianten  $\psi^1(z) := q^1 q^2 + p_1 p_2$ ,  $\psi^2(z) := q^1 p_2 - q^2 p_1$ ,  $\psi^3(z) := H_1 - H_2$ . An dieser Stelle können Sie sich durch explizite Rechnung überzeugen, daß  $\psi^1, \psi^2, \psi^3$  tatsächlich Bewegungsinvarianten sind. Aber Sie müssen sich in Geduld üben, bis Sie den Zusammenhang mit der  $SU(2)$ -Symmetrie einsehen können. Lassen Sie uns die Bewegungskonstanten zusammenfassen:  $\Psi := (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ . Wir haben dann eine Abbildung  $\Psi : \mathbb{P} = \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  des Phasenraums nach  $\mathbb{R}^3$  gegeben, welche später als die **Momentenabbildung** erkannt wird. Auf der Niveaulfläche

$$H^{-1}(1) = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \frac{1}{2} \|z\|^2 = 1\right\} = \mathbb{S}_{\sqrt{2}}^3 \quad (3.14)$$

ist  $\Psi$  natürlich als Restriktion ebenfalls erklärt, und es gilt  $\Psi(H^{-1}(1)) \subset \mathbb{S}_1^2 =: \mathbb{S}^2$ . Die Einschränkung von  $\Psi$  auf  $H^{-1}(1)$  werde wieder mit  $\Psi$  bezeichnet. Dann ist diese Einschränkung  $\Psi : H^{-1}(1) \rightarrow \mathbb{S}^2$  eine surjektive Abbildung, deren Fasern  $\Psi^{-1}(x)$  ( $x \in \mathbb{S}^2$ ) jeweils Kreislinien in  $H^{-1}(1)$  sind. Und zwar sind diese Kreislinien gerade die Bahnen des Systems zur Energie  $E = 1$  und den speziellen Werten  $x \in \mathbb{S}^2$  für  $\Psi$ : Zu  $a \in \Psi^{-1}(x)$  ist  $u(t) = \exp(it)a$  Lösung durch  $a$  mit Bahn  $\Psi^{-1}(x)$ .  $\Psi$  ist also wegen  $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  die Projektionsabbildung der oben beschriebenen Äquivalenzrelation, und  $\Psi(H^{-1}(1))$  ist der Bahnenraum  $\mathbb{B}_1$  der Bewegung zur Energie  $E = 1$ . Die Projektionsabbildung  $\Psi : \mathbb{S}_r^3 \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$  in anderem Zusammenhang auch die **Hopf-Abbildung** oder die **Hopf-Faserung** genannt. ■

Als Spezialfall interessant sind wieder lineare Systeme.

**Konzept 3.2.2 — Lineare Hamiltonsche Systeme.** Ein lineares Hamiltonsches System ist ein Hamiltonsches System  $(\mathbb{P}, H)$  bestehend aus einem Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$

und einer Hamilton-Funktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  von der Form  $H(z) = H(0_{\mathbb{P}}) + \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{M}z \rangle_{\mathbb{P}}$  mit  $\mathcal{M} \in \text{Mat}(\text{Dim}(\mathbb{P}), \mathbb{R})$  und (ohne Einschränkung der Allgemeinheit)  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^T$ .

Es gilt  $\text{grad}_{\mathbb{P}} H = \mathcal{M}z$  und daher  $\dot{z} = \mathbb{J} \text{grad}_{\mathbb{P}} H(z) = \mathbb{J} \mathcal{M} z$ . Die Systemmatrix (erzeugt die Systemevolution) ist somit  $\mathcal{E} := \mathbb{J} \mathcal{M} \in \text{Mat}(\text{Dim}(\mathbb{P}), \mathbb{R})$ . Die Konstante  $H(0_{\mathbb{P}})$  hat keinen Einfluß auf die Systemevolution. Dies entspricht der Tatsache, daß wir lediglich Energiedifferenzen aber niemals absolute Energiewerte messen können. Da wir hier hauptsächlich die Evolution dynamischer Systeme betrachten, setzen wir der Einfachheit halber  $H(0_{\mathbb{P}}) = 0_{\mathbb{R}}$ . Dies entspricht dann einer bestimmten Eichung der Apparaturen, die zur Messung von Energiedifferenzen experimentell eingesetzt werden. Sollten die Apparaturen herstellungsmäßig anders geeicht sein, so muß dies berücksichtigt werden.

### 3.3 Die symplektische Gruppe

Gegeben sei ein lineares Hamiltonsches System  $(\mathbb{P}, H)$  mit Systemmatrix  $\mathcal{E} = \mathbb{J} \mathcal{M} \in \text{Mat}(\text{Dim}(\mathbb{P}), \mathbb{R})$ . Diese erfüllt offenbar die Identität  $\mathbb{J} \mathcal{E} - (\mathbb{J} \mathcal{E})^T = 0$ , denn  $\mathbb{J} \mathcal{E} = \mathbb{J}^2 \mathcal{M} = -\mathcal{M}$ , und ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^T$ .

**Konzept 3.3.1 — Symplektische Algebra.** Eine Matrix  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim}(\mathbb{P}), \mathbb{R})$  und der entsprechende Endomorphismus des  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) heißen **infinitesimal symplektisch**, wenn  $\mathbb{J} \mathcal{E} - (\mathbb{J} \mathcal{E})^T = 0$ . Die infinitesimal symplektischen Endomorphismen bilden einen Unterraum  $\mathfrak{sp}(2n) \subset \text{Lin}(\mathbb{R}^{2n})$ , die sogenannte **symplektische Algebra**.

**Aussage 3.3.1** Lineare Hamiltonsche Systeme erhalten das System-Volumen im Impulsphasenraum.

**Begründung:** Es sei  $(\mathbb{P}, H)$  ein lineares Hamiltonsches System mit Systemmatrix  $\mathcal{E} \in \text{Mat}(\text{Dim}(\mathbb{P}), \mathbb{R})$ . Zunächst ist für jede Matrix in  $\text{Lin}(\mathbb{R}^{\text{Dim}(\mathbb{P})})$

$$\text{Det}(\text{Exp}(t\mathcal{E})) = \text{Exp}(t \text{Spur}(\mathcal{E})) . \quad (3.15)$$

Da nach Voraussetzung  $\mathcal{E} \in \mathfrak{sp}(\text{Dim}(\mathbb{P}))$  gilt  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = 0$ , denn  $\text{Spur}(\mathcal{E}) = -\text{Spur}(\mathcal{E} \mathbb{J}^2) = \text{Spur}(\mathbb{J} \mathcal{E} \mathbb{J}) = -\text{Spur}(\mathcal{E}^T) = -\text{Spur}(\mathcal{E})$ , woraus die Behauptung folgt. ■

Der Phasenfluß eines linearen Hamiltonschen Systems hat nicht nur die Eigenschaft, das vom System eingenommene Phasenraumvolumen zu erhalten. Für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  gilt auch

$$(\text{Exp}(t\mathcal{E}))^T \mathbb{J} \text{Exp}(t\mathcal{E}) = \mathbb{J} , \quad (3.16)$$

denn  $(\text{Exp}(t\mathcal{E}))^T = \text{Exp}(t\mathcal{E}^T)$ , also wegen  $\mathbb{J} \mathcal{E} = -\mathcal{E}^T \mathbb{J}$  gilt

$$(\text{Exp}(t\mathcal{E}))^T \mathbb{J} = \mathbb{J} \text{Exp}(-t\mathcal{E}) = \mathbb{J} (\text{Exp}(t\mathcal{E}))^{-1} . \quad (3.17)$$

Deswegen läßt ein linearer hamiltonscher Fluß die antisymmetrische Bilinearform

$$\omega : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R} , \quad \omega(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \langle z_1, \mathbb{J} z_2 \rangle_{\mathbb{P}} \quad (3.18)$$

invariant, also  $\omega(\Phi_t(z_1), \Phi_t(z_2)) = \omega(z_1, z_2)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dies ähnelt der Invarianz des kanonischen inneren Produkts des  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) unter orthogonalen Transformationen.

Den Bewegungen der Mechanik in der Hamiltonschen Formulierung entspricht damit eine besondere Art von Geometrie, die sogenannte **symplektische Geometrie**, für deren Würdigung uns leider und wirklich schmerzlich die Zeit fehlt.

### 3.4 Potentialtheorie

Bewegungen mechanischer Systeme in externen Potentialfeldern konstituieren die wohl wichtigste Klasse hamiltonscher Bewegungen. So umfaßt diese Klasse prominente Beispiele wie die Bewegung im Gravitationspotential oder die Bewegung im elektrostatischen Potential. Mit dem Spezialfall der geodätischen Bewegung teilt sie die wichtige Eigenschaft der Reversibilität, und sie läßt sich oft mit dieser vergleichen. Entsprechend wurden viele geometrische Techniken zur Analyse der Dynamik in externen Potentialen entwickelt.

Wir kommen zunächst auf einige allgemein gültige Eigenschaften solcher Systeme zu sprechen. Solche Systeme meint dynamische Systeme  $(\mathbb{P}, H)$  mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P} \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  ( $d = 3n$  für  $n \in \mathbb{N}$  Punktteilchen in drei Raumdimensionen), wobei  $\text{Pr}_1 \mathbb{P} = \mathcal{Q}$  die Projektion auf dem Konfigurationsraum  $\mathcal{Q}$  bezeichne und  $\text{Pr}_2 \mathbb{P} = \mathcal{P}$  die Projektion auf den Impulsraum  $\mathcal{P}$ , und Hamilton-Funktion der Form

$$H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(z) = \frac{1}{2} \langle p, Kp \rangle_{\mathcal{P}} + V(q), \quad (3.19)$$

mit  $K \in \text{Mat}(\dim(\mathcal{P}), \mathbb{R})$  symmetrisch und positiv definit, und  $V \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ . Außerdem ist  $z = (q, p) := (\text{Pr}_1 z, \text{Pr}_2 z)$ . Offenbar gilt  $\text{grad}_{\mathcal{Q}} H(z) = \text{grad}_{\mathcal{Q}} V(q)$  und  $\text{grad}_{\mathcal{P}} H(z) = Kp$ . Die Hamilton-Gleichungen sind somit  $\dot{q} = Kp$  (beachten Sie, daß die inversen Massen der Punktteilchen in  $K$  inkludiert sind) und  $\dot{p} = -\text{grad}_{\mathcal{Q}} V(q)$ . Die quadratische Form  $\frac{1}{2} \langle p, Kp \rangle_{\mathcal{P}}$  heißt **kinetische Energie** des dynamischen Systems und wird mittels einer linearen symplektischen Transformation  $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , erklärt durch  $(q, p) \rightarrow (Rq, Rp)$  mit einer Drehung  $R \in SO(d)$  diagonalisiert. Die Kehrwerte der Eigenwerte von  $K$  sind gerade die Massen der Punktteilchen des dynamischen Systems.

#### 3.4.1 Existenz des Phasenflusses

Wir kümmern uns zunächst um die Frage, welche Eigenschaften des Potentials  $V$  (der potentiellen Energie) die Existenz eines Phasenflusses garantieren. Eigenschaften des Flusses wie Vollständigkeits werden dann als entsprechende Qualifikationen des Potentials benannt.

**Aussage 3.4.1** Das Paar  $(\mathbb{P}, H)$  bezeichne ein dynamisches System mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P} = \mathcal{Q} \times \mathcal{P} \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  und Hamilton-Funktion  $H : \mathcal{Q} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , erklärt durch  $H(q, p) := \frac{1}{2} \langle p, Kp \rangle_{\mathcal{P}} + V(q)$  mit  $V \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ . Nur dann gibt es Anfangsbedingungen  $(q_0, p_0) \in \mathbb{P}$  so, daß die Norm  $\|\Phi_t(q_0, p_0)\|_{\mathbb{P}}$  von Lösungen unbeschränkt wächst, wenn sich eine Punktmasse beliebig weit von ihrer Anfangslage  $q_0$  entfernt hat.

#### Begründung:

1. Mit den hamiltonschen Bewegungsgleichungen gilt wegen der Symmetrie von  $K$  und des inneren Produkts,  $\dot{H}(q, p) = \langle \dot{q}, \text{grad}_{\mathcal{Q}} V \rangle + \langle \dot{p}, \text{grad}_{\mathcal{P}} H \rangle = \langle Kp, \text{grad}_{\mathcal{Q}} V \rangle + \langle -\text{grad}_{\mathcal{Q}} V, Kp \rangle = 0$ . Folglich gilt  $E_0 := H(q_0, p_0) = H(q, p)$  entlang der Bewegungen des Systems im Impulsphasenraum.

2. Es sei  $0 < m \in \mathbb{R}$  die minimale Masse eines Partikels des Systems und  $f \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$  durch  $q \mapsto f(\|q\|_{\mathcal{Q}}) := 2m(E_0 - V(\|q\|_{\mathcal{Q}}))$ . Da die kinetische Energie des Systems semi-positiv definit ist, gilt  $f \geq 0$  in  $\mathcal{Q}$ . Die gesamte kinetische Energie des Systems ist nach oben durch  $\frac{1}{2m} \|p\|_{\mathcal{P}}^2$  beschränkt. Mit der Energieerhaltung folgt  $\|p\|_{\mathcal{P}} \geq f^{1/2}(\|q\|_{\mathcal{Q}})$ . Damit steht  $\|p\|_{\mathcal{P}}$  in Relation zur Systemkonfiguration entlang der Bewegung im Impulsphasenraum.
3. Es ist  $\|\Phi_t(q_0, p_0)\|_{\mathbb{P}}^2 = \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|p(t)\|_{\mathcal{P}}^2 \geq \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2 + f(\|q(t)\|_{\mathcal{Q}})$ , woraus zusammen mit der Voraussetzung  $f \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$  die Aussage folgt. ■

**Aussage 3.4.2** Es sei  $(\mathbb{P}, H)$  ein dynamisches System mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$  und Hamilton-Funktion wie zuvor. Für das zugehörige Potential  $V \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$  gelte  $V(q) \geq -c(1 + \|q\|_{\mathcal{Q}}^2)$  mit  $0 < c \in \mathbb{R}$  für alle  $q \in \mathcal{Q}$ . Dann erzeugen die hamiltonschen Bewegungsgleichungen einen Fluß  $\Phi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{P}, \mathbb{P})$ .

**Begründung:**

1. Es seien  $m$  und  $M$  das Minimum und Maximum der inversen Eigenwerte von  $K$ , das sind die minimale und maximale Masse der zum System gehörenden Partikelchen. Aus der ersten hamiltonschen Bewegungsgleichung folgt  $\|\dot{q}\|_{\mathcal{Q}} = \|Kp\|_{\mathcal{Q}} \leq m^{-1} \|p\|_{\mathcal{P}}$ .
2. Es sei  $I := (t_{\min}, t_{\max})$  das maximale der Lösungsintervall. Für Anfangswerte  $(q_0, p_0) \in \mathbb{P}$  zum Zeitpunkt  $t_0 \in I$  setzen wir  $E_0 := H(q_0, p_0)$ . Dann gilt für alle Zeiten  $t \in I$

$$\begin{aligned} \|\dot{q}(t)\|_{\mathcal{Q}} &\leq m^{-1} \|p(t)\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\sum_{a \in \mathcal{I}(\dim(n))} \|p_a(t)\|_{\mathbb{R}^3}^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2M}}{m} \sqrt{E_0 - V(q(t))}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Weiterhin ist  $E_0 - V(q) = E_0 + c(1 + \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2) \leq \max(E_0, c)(2 + \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2)$ , und daher gilt mit  $k := \sqrt{2M \cdot \max(E_0, c)}/m$

$$\|\dot{q}(t)\|_{\mathcal{Q}} \leq k \sqrt{2 + \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2}. \quad (3.21)$$

3. Wir setzen  $f(t) := 2 + \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2$ . Für  $t \in [0, t_{\max}[$  folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + 2 \int_{[0,t]} ds \langle \dot{q}(s), \dot{q}(s) \rangle \\ &\leq f(0) + 2 \int_{[0,t]} ds \| \dot{q}(s) \|_{\mathcal{Q}}^2 \\ &\leq f(0) + 2k \int_{[0,t]} ds \left( 2 + \|q(s)\|_{\mathcal{Q}}^2 \right) = f(0) + 2k \int_{[0,t]} ds f(s). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Relation ist noch unbefriedigend, weil die zu abschätzende Funktion als Inte-

grand auf der rechten Seite der Relation auftaucht. Nun gilt aber auch eine analoge Aussage für  $t \in ]t_{\min}, 0]$  und damit ist die Gronwall–Ungleichung anwendbar. Sie liefert eine echte Abschätzung für  $f$ , nämlich  $f(t) \leq f(0) \exp(2k|t|)$  für alle  $t \in I$ . Folglich ist  $f$  beschränkt. Für die Lösung  $\Phi_t(z_0) = (q(t), p(t))$  mit Anfangsbedingung  $z_0 := (q_0, p_0) \in \mathbb{P}$  gilt somit

$$\begin{aligned} \|\Phi_t(z_0)\|_{\mathbb{P}}^2 &= \|q(t)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|p(t)\|_{\mathcal{P}}^2 \leq (2M \cdot \max(E_0, c) + 1) f(t) \\ &\leq (2M \cdot \max(E_0, c) + 1) f(0) \exp(2k|t|). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wegen dieser Abschätzung und der lokalen Lipschitz–Stetigkeit des hamiltonschen Vektorfeldes läßt sich die Lösung für alle Zeiten fortsetzen.

4. Die stetige Differenzierbarkeit des Phasenflusses ist Ihrer Inspiration überlassen. ■

Bitte beachten Sie die eigenwilligen Energiedimensionen in obiger Aussage. Zum Beispiel haben wir den Ort als dimensionslos gewählt, die Potentialkonstante muß die Dimension einer Energie tragen und so weiter.

**Konzept 3.4.1 — Hillsches Gebiet.** Sei  $(\mathbb{P}, H)$  ein dynamisches System mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$  und Hamilton–Funktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Potential  $V \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ . Da die kinetische Energie des Systems nichtnegativ ist, verbleibt für die Gesamtenergie  $E = H(q_0, p_0)$  die Trajektorie mit Anfangsbedingung  $(q_0, p_0) \in \mathbb{P}$  in der Zusammenhangskomponente von  $q_0$  des **Hillschen Gebietes**  $\{q \in \mathcal{Q} : V(q) \leq E\}$ .

### 3.4.2 Reversibilität des Phasenflusses

Wir betrachten jetzt Potentiale  $V : \mathcal{M} \subset \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$ .

**Konzept 3.4.2 — Zeitumkehr.**

1. Die Abbildung  $\mathcal{T} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , erklärt durch  $(q, p) \mapsto (q, -p)$  auf dem Impulsphasenraum  $\mathbb{P} = \mathcal{M} \times \mathcal{P}$  wird **Zeitumkehr** genannt.
2. Eine Hamilton–Funktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  (und der von ihr erzeugte Phasenraumfluß) heißt **reversibel**, wenn sie zeitumkehrinvariant ist, das heißt wenn  $H \circ \mathcal{T} = H$ .

Offenbar ist  $\mathcal{T}$  ein Diffeomorphismus und eine Involution. Zur Erinnerung: Letzteres bedeutet, daß  $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \text{id}_{\mathbb{P}}$ .

■ **Beispiel 3.3** Es sei  $(\mathbb{P}, H)$  ein dynamisches System aus  $n \in \mathbb{N}$  Punktteilchen mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$  und Hamilton–Funktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , erklärt durch  $H(q, p) := \frac{1}{2} \langle p, Kp \rangle_{\mathcal{P}} + V(\|q\|_{\mathcal{Q}})$  mit  $K \in \text{Mat}(3n, \mathbb{R})$  symmetrisch und positiv definit und einem Potential  $V \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ . Es ist  $(H \circ \mathcal{T})(q, p) = H(q, -p) = H(q, p)$  für alle  $(q, p) \in \mathbb{P}$ . Diese Hamilton–Funktion der Bewegung im Potential  $V$  ist also reversibel. ■

Ohne Begründung bringen wir folgende Eigenschaft von reversiblen Hamilton–Funktionen:

**Aussage 3.4.3** Der von einer reversiblen Hamilton–Funktion  $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugte Fluß  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  besitzt die Eigenschaft  $\Phi_{-t} = \mathcal{T} \circ \Phi_t \circ \mathcal{T}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

### 3.4.3 Erreichbarkeit

Durch geeignete Wahl der Anfangsrichtung können wir in der Galilei–Raumzeit von einem Ort zu jedem anderen kommen. Dabei ist sogar unwesentlich, ob der Phasenfluß vollständig ist, also etwa ob er Aussage 3.4.2 erfüllt. Wesentlich ist allerdings, daß die Energie ausreichend groß ist.

**Aussage 3.4.4** Es sei  $(\mathbb{P}, H)$  ein dynamisches System mit Impulsphasenraum  $\mathbb{P}$  und Hamilton–Funktion  $H : \mathbb{P} = \mathcal{Q} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Potential  $V \in C^2(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$  auf dem Ortsraum  $\mathcal{Q}$ .  $(\mathbb{P}, H)$  erzeugt eine Dynamik mit folgender Eigenschaft: Für alle Energien  $E > \sup_{q \in \mathcal{Q}} V(q)$  und Orte  $q_0, q_1 \in \mathcal{Q}$  gibt es einen Anfangswert  $z_0 = (q_0, p_0) \in \Sigma_E := \{z_0 \in \mathbb{P} : H(z_0) = E\}$  und eine Zeit  $0 \leq t \in \mathbb{R}$  derart, daß entlang der Bewegung  $\gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{Q})$  im Ortsraum mit  $\gamma(t_0) = q_0$  und  $\dot{\gamma}(t_0) = Kp_0$  gilt  $\gamma(t) = q_1$ .